
Ex Libris
Marchionis
Salsae

DE FLUXIONIBUS EARUMQUE USU

AUCTORE

CAROLO GIANELLA

SOCIETATIS JESU.



MEDIOLANI. MDCCLXXI.

Apud Joseph Galeatium Regium Typographum.
Superiorum permissu.



AD LECTOREM.

QUid commodi hæc afferat de *Fluxionibus* disputatio, quæres forte, Lector benevole. Præclare, si id unum postules. Atque, ut ea mittam, quibus ars commendatur eorum, qui Mathematici vocantur; illud non inutile videtur, multos esse, quorum alii cæmenta convehant, solum alii effodiant, in idem omnes opus conveniant. Quod si communi consilio verum protrahere, inventum excolere adnitantur multi, non maxime prodesse dicendi non sunt. Hac enim ratione pluribus satisfit, cum non omnes unus persuadere possit. Adeo differunt inter se hominum ingenia. Ut autem sua huic utilitas labori accederet, ex ultima rerum origine notiones, quibus stat supputatio, quam *differentiarum* vocant, arcessere malui, instruere, expolire, quo pronior res omnis perpetuo ductu ad majora paulatim assurgeret. Hinc factum est, ut brevitas etiam utilitati non deesset. Ubi enim se mutuo partes excipiant, verendum non est ne mole sua laboret scriptio. Cæterum legere properantem diutius morari non est opus. Vale.

RERUM INDEX.

CAPUT PRIMUM.

Notio motus, & fluxionum.

CAPUT SECUNDUM.

Calculus fluxionum.

In-

CAPUT TERTIUM.

De usu fluxionum in curvis, quarum ordinatæ sunt parallelæ.

CAPUT QUARTUM.

De usu fluxionum in curvis genitis ope virium, quarum directiones sint quælibet.

CAPUT QUINTUM.

Compendium calculi fluxionum.

DE

DE FLUXIONIBUS EARUMQUE USU.

CAPUT PRIMUM.

Notio motus, & fluxionum.

I.

Quid sit *conscientia existentiæ* novit quisque, qui, cum sentit, non solum sensationem ipsam experiatur, verum etiam se sentire.

II.

Præsupposita *conscientia existentiæ* oritur idea *successionis*. Hanc aquirit animus ex realiter succedentibus sensationibus plurium objectorum, quæ ipsum diversis inter se modis afficiant. Novit enim ille ipsam sensationum diversitatem, ex quibus diversa inter se concludit esse objecta. Illa proinde sibi invicem dicit succedere, cum aliæ, atque aliæ ab ipsis oriuntur sensationes.

III.

Aliud porro ipsa successio est, & aliud id, de quo ipsa successio prædicatur. Maximum

enim intercedit discrimen inter ipsa objecta ad sensus appellentia, & ipsum objectorum ad sensus appulsum, ex quo ratio successionis deducitur.

IV.

Idea temporis idea successionis est, & successionem ipsam includit, & dicit. Hoc apud quemque sonat tempus, hoc quisque cogitat, dum audit, aut dicit tempus.

V.

Cum autem idea *successionis* idea sit abstracta, & nihil extra mentem coexistat, quod illi adæquate respondeat; illud propterea contingit, ut, si quis interrogetur quid tempus sit, nihil illi sit præsto, quod reponat; cum tamen tacitus, quid vere sit, optime sciat.

VI.

Actus autem illi, quibus animus vel sentit, vel judicat, in mente non perseverant, sed & intereunt, & aliis interituris dant locum. Id apud se fieri experitur animus idem, simulque per reflexionem ideas memor inter se comparat, & distinguit. Cum vero actum inter & actum actus nullus intersit revera, fit inde, ut hiatum nullum inter diversas sibi invicem succedentes sensationes animad-

ver-

vertat. Hinc, quamvis id in se neque experiatur, neque forte experiri possit; successionem tamen, atque adeo tempus ipsum ita inter se comparatum esse dicit, ut initium temporis, quod incipit succedere, finem illius excipiat, quod successit, & propterea sit *continuum*.

VII.

Quod si reminiscenti animo successio jam habita obversetur, tum tempus ab eo denominatur *elapsum*: si præscio tamquam habenda exhibeatur, *futurum*: si vero a successione vel initium, vel finem, vel utrumque excludat animus reminiscens, & præscius, tum tempus *ævum* dicit, vel *æternitatem*, prout his vocabulis hanc vel illam attribuit significationem: sin autem in ipsa successione & ab eo præscindat, quod habita sit, & ab eo, quod habenda sit, *durationem*.

VIII.

His positis *idea temporis* a *tempore reali* est rite distinguenda. Cum enim sensationibus aliquod objectum respondeat necesse sit, non quidem quoquo modo, sed quatenus objectum *tum* existit, *cum* existens ab animo per sensationem cognoscitur; id, per quod obje-

ctum

ctum *est tum*, *cum est*, vere fundamentum est ideæ temporis, & *reale tempus* dici potest, seu potius *momentum*.

IX.

Cum autem successio nulla haberi possit, quin aliquid sit, de quo successio ipsa prædicetur; in tempore propterea, quod successionem dicit, eamque continuam, aliquod semper erit momentum, quod & finis sit habitæ successionis, & initium habendæ, quin tamen umquam momentum sit ipsum tempus. Momenti enim notio rationem omnem excludit successionis. Hinc etiam, licet continuus sit ortus, & interitus momentorum, numquam tamen ulla repetita momenta tempus dicent. Aliud enim est ex §. III. id de quo prædicatur successio, aliud ipsa successio.

X.

Neque vero ullam in se ipso habet animus methodum, qua tempus dimetiri possit. Non enim aut habitas ideas in nostra manu est recensere, actusque elicitos ennumerare, aut si hiatus ullus actum inter & actum intercedit, eos indigitare, qui interseri potuissent. Extrinsecus igitur subsidia sunt advocan-

canda, & *facta* aliqua idcirco *graviora*, aut magis conspicua *phaenomena* hac & illac per ipsam durationem tamquam certa aliqua *signa* defigimus, ad quae identidem mentem dirigamus, ne per ipsam solitariam durationem incerti omnino erremus. Horum ope respondemus interrogati per *quando*. Quod si per *quamdiu* interrogemur binas quasi epochas dessignamus tamquam initium, & finem quaesitae durationis, quam deinde mensurandam relinquimus interroganti.

XI.

Porro in objecto corporeo praeter id, per quod illud *est tum*, *cum est*, aliud etiam considerandum occurrit, quod *locum* dicimus. Non enim corpus dumtaxat *est tum*, *cum est*, sed etiam *tum cum est*, *est ibi*, *ubi est*; quod quidem *locum* dicimus, & aliquid prorsus est reale, atque in se determinatum.

XII.

Id vero, per quod corpus non amplius ibi esse potest, ubi erat, sed alibi, atque alibi; quamdam innuit abstractam capacitatem continendi corpora, quam *spatium* appellamus.

XIII.

Cum autem corpus idem per aliquod tem-

pus

pus eumdem perseverat occupare locum, illud *quiescere* dicimus: at si pro diversis momentis diversus etiam jugiter locus fuerit, quamvis post aliquod tempus ad aliquem ex iis locis occupandum redeat, in quibus ante fuit, illud dicimus *motum fuisse*.

XIV.

In *motus* igitur notione ejusmodi locorum mutatio includitur, quæ successioni respondet momentorum. Hoc unum autem erit discrimen, quod non amplius, quæ jam fuere momenta, redire queant, cum aliqua ex prioribus locis & possint redire, & interdum etiam fortasse redeant. Quemadmodum igitur momentorum successio continua est, locorum etiam mutatio in motu erit continua, proindeque motus *mutationem* dicet *locorum successivam*, & *continuam*.

XV.

Cum vero hæc peragitur *locorum continua*, & *successiva mutatio*, mobile *spatium* dicitur *percurrere*, & *lineam generare*, quæ proinde nil aliud erit, quam *via ipsa*, & *semita* mobilis, quod propterea indivisibile supponitur, ut linea ipsa ab omni & latitudine, & crassitudine præscindat, & in longum tantum extendi intelligatur.

XVI.

XVI.

Vere proinde *linea*, quæ hoc modo generari concipiatur, non coexiſtit, propterea quod mobile unum tantum pro quolibet momento; quod unum præſens eſt in tempore, occupat locum. Continua tamen eſt, & nuſquam interrupta, cum locorum occupatio ſit hujuſmodi. Nihil tamen vetat, quominus ea ſub alia etiam ratione conſideretur, a qua coexiſtentia non ſit excludenda, includatur vero in ea continuitas.

XVII.

Ut autem diverſæ inter ſe eſſe poſſunt lineæ, illa præ ceteris notanda eſt, quæ *recta* dicitur. De ea plura diſputat P. Boſcovich in *Diſſert. de Lumine p.* 1., ubi poſtquam veterum definitiones retulit, veram *rectæ* notionem tradit, quam haud aliis, quam ejus verbis exponam.

Vera rectæ lineæ *notio, qua ſaltem una in Geometria utimur, & per quam cætera omnia demonſtramus, petitur ex congruentia, qua recta naturâ ſuâ indefinite producta, ſibi ipſi, vel potius loco ſemel a ſe occupato ſemper congruit, quocumque modo mutetur ejus poſitio, dummodo bina ejus puncta in iiſdem punctis loci ſint ſive*

ſin-

singula in singulis, sive in alternis. Hæc affectio ipsi soli est propria, & ex ea illud eruitur, segmentum quodcumque rectæ lineæ cuicumque alterius rectæ lineæ indefinitæ debere congruere totum, dumodo bina ejus puncta quæcumque binis congruant ejusdem punctis. Hinc nostræ menti ipsa videtur simplicissima, & ipsi proximus circularis arcus, qui circuli æqualis arcui congruit, non quidem quotiescumque bina congruunt puncta, sed si certa tantum ratione superponantur. Ex hisce congruentiis æqualitatem æstimamus, & ex æqualitate semel per congruentiam definita, æqualitatem eruimus dissimilium etiam figurarum ope principii, quod ab æqualibus æqualia auferendo, vel æqualia iisdem addendo, æqualia remanent.... Idcirco igitur maxime humanæ menti simplicissima videtur recta; & post ipsam simplicissimus circularis arcus, quia congruentiam hanc in quibuscumque rectarum, & in quibusdam æqualis radii circularium arcuum superpositionibus, & ejus fæcunditatem, ac summam in comparandis magnitudinibus utilitatem evidentissime intuetur: alteri autem mentium generi, quod æque quaspiam alias aliarum figurarum proprietates perspectas haberet, illæ ipsæ figuræ simplicissimæ erunt, & illas ipsas pro fundamento adhibebit

di-

diversissimæ illius Geometriæ, qua ejusmodi mentes magnitudinum comparationem instituerent, & reliquarum figurarum proprietates eruerent.

XVIII.

Hoc modo cognita *recta linea*, reliquæ etiam generalem sortiuntur negativam denominationem, & *Curvæ* eæ dicuntur, quæ rectæ non sunt.

XIX.

Notio porro *directionis* in ipsius rectæ notione includitur, atque in eadem plura puncta esse dicuntur *directione*, cum quæ recta per eorum duo quævis ducitur, ea per reliqua etiam omnia transit. Hinc unam eamdemque recta dicitur habere *directionem*, curva vero perpetuo aliam atque aliam. Cum enim curvæ notio a rectæ negatione oriatur, si recta aliqua alicubi cum aliquo curvæ segmento congrueret, linea, quæ curva esset per hypothesim, curva amplius non esset.

XX.

Si igitur mobile quodpiam curvam generare concipiatur, illud etiam perpetuo a recta deflectere intelligendum erit, & aliam, atque aliam jugiter directionem inire. Hinc jugiter *directionem mutare* dicendum erit. Nisi

enim

enim id fiat, alia, atque alia esse nequit ea, quam init directionem.

XXI.

Directio autem illa, quam mobile curvam describens in singulis ejus punctis mutat, directio *tangentis* dicitur, *tangens* vero ea recta, quæ juxta directionem illam ducatur. Hinc tangens curvæ unico illi curvæ puncto occurrit, cujus est tangens, secus recta cum curva congrueret. Notandum tamen hoc est, 1.° quidem tangentis cum unico curvæ puncto occursum non prohibere, quominus curvam ipsam in aliis ejus punctis alibi secet tangens: 2.° hanc tangentis proprietatem ejusmodi non esse, ut, si qua recta quandocumque unico curvæ puncto occurrat, ea sit etiam curvæ ibidem tangens. Rectæ enim ad aliquot plurium curvarum puncta duci possunt, quæ curvis ipsis in unico occurrunt puncto, quin sint tangentes.

XXII.

Prout autem diversa lex est, qua mobile curvam generans directiones jugiter mutat, diversæ etiam esse curvæ dicuntur. Atque hinc illud sequitur, quod, si curva curvæ superimponatur, aut tota congruet cum tota, aut

aut nullum unius ſegmentum cum ſegmento alterius. Nam vel lex mutationis directionum eadem ubique eſt, & tum eædem pariter ubique ſunt directiones, quas init mobile, & curvæ congruunt; aut eſt ubique diverſa, & nullibi tum congruentia habetur: nequit vero aut ubique non eſſe eadem, aut ubique diverſa. Cum enim curvarum diſcrimen ex ipſa directionum diverſa mutatione deducatur, diverſa etiam eſſe lex debet pro uno aliquo unius curvæ ſegmento, & pro quovis alio ullius alterius.

XXIII.

Hæc de motu jam exiſtente. At, ut habeatur motus ipſe, manifeſtum eſt aliquam requiri cauſam, quæ ad motum corpus ipſum determinet, cum illud per ſe indifferens ſit vel ad motum, vel ad quietem. Id autem, quidquid tandem ſit, quod in cauſa eſſe poteſt, cur habeatur motus, *potentiæ* nomine deſſignatur. *Potentia vero*, prout eam agere, motumque actu efficere intelligimus, *vis* dicitur: id demum, quod ex *vi* in corpus redundat, quod deinde movetur, qiudquid rurſus illud ſit, *mobilis ad motum determinatio* congrue dici poteſt.

XXIV.

Antequam in re satis per se obscura progredior, quo minus implexa tractatio omnis fiat, notandum censeo duplicem esse sensum posse, quo sumatur commemorata *mobilis ad motum determinatio*. Sumi enim potest vel prout est in mobili, vel prout ad spatium refertur percurrendum. Si primus sensus vocabulis illis subjiciatur, incertum mihi omnino est, quid ulterius de ipsa prædicem *determinatione*, quinimmo tam incertum, quanta est indolis, naturæque virium, & potentiarum incertitudo. Superest igitur ut assumatur posteriore sensu.

XXV.

Assumpta vero *ea mobilis ad motum determinatione* hoc sensu, duo statim occurrunt adnotanda. Primum illud est, quod cum mobile, dum movetur, aliquam ineat directionem necesse sit, &, si curvam describit, aliqua sit directio oporteat, quam deinde mutet; quæ propterea agit potentia, motumque generat, ea certa etiam directione mobile sollicitabit, nullaque erit *mobilis determinatio*, nisi juxta certam directionem.

XXVI.

Alterum illud est, quod, si quando mobilis ad motum determinatio mutetur, momento fieri mutatio nequeat. Momentum enim ipsum omnem prorsus renuit successionis rationem, adeoque etiam mutationis.

XXVII.

Habeat jam mobile *certam ad motum determinationem*, *certa* igitur directione percurret mobile *certum* spatium, quod *certo* etiam tempore describetur, cum *certa*, atque in se definita sit ipsa ad motum determinatio. Quod si haec jugiter eadem perseverare in mobili supponatur per aliquod tempus, 1.° linea generata erit recta, cum directio non mutetur: 2.° mutatio successiva locorum, & mobilis in quovis loco determinatio ad alia successive loca occupanda eadem erit jugiter, nisi quod loca ipsa diversa sint futura, & diversa momenta, quibus in aliis, atque aliis locis reperietur mobile.

XXVIII.

Qui autem in hac hypothesi habitus est motus, ille est, qui passim dicitur *Uniformis*, sive *aequabilis*, ad quem ita reliqui alii motus referuntur, quemadmodum ad rectam lineam curvae.

XXIX.

Ex hac vero uniformi locorum ſucceſſione in motu æquabili methodus ducitur tempus exprimendi. Quæ enim continua momentorum ſucceſſio in tempore habetur, ea conſtans eſſe, eodemque, ut ita dicam, modo ſemper peragi concipitur. Quam igitur rationem lineæ generatæ per motum æquabilem habent inter ſe poſt quodcumque tempus, eamdem inter ſe habent tempora, quibus illæ rectæ deſcriptæ ſunt. Hinc motus æquabilis ſpatia diverſis percurſa temporibus tempora ipſa, quibus deſcripta ſunt, referre concipimus.

XXX.

Hinc etiam ſpatia æqualia percurri dicuntur æqualibus temporibus in motu æquabili: quod quidem a pleriſque in definitionem aſſumitur ipſius motus uniformis.

XXXI.

Ea autem in motu æquabili ſpatii percurſi relatio ad tempus *Velocitatis*, ſeu *Celeritatis* notionem ſuppeditat, quæ tanto cenſetur major, quo majus eſt ſpatium, & tempus minus.

XXXII.

Si igitur ſpatium dicatur y, tempus x, celeritas vero c, Mechanicorum more per hanc æquationem $c = \frac{y}{x}$, ſive $cx = y$ exprimitur celeritas: in quo quidem, ne quantitates heterogeneæ per ſe invicem dividi, aut multiplicari dicantur, alius ſupponi poteſt datus motus æquabilis, cujus ſpatia x referant tempus ex §. XXIX. Tum enim quotieſcumque diviſio aliqua occurret, aut multiplicatio ſpatii per tempus, loco temporis, illius motus ſpatia poterunt aſſumi.

XXXIII.

Quæritur jam utrum potentia jugiter agens ad hoc requiratur, ut eadem in mobili ad motum perſeveret determinatio, & æquabilis habeatur motus. Verum ſi ex ipſa potentiarum notione rem velim definire, nihil prorſus eſt, quod certo aſſeri poteſt. Quod ſi motuum phænomena conſulantur, conjici congruentius poteſt, ſufficere, a nulla ſuperveniente vi, quæ jam habetur determinatio, immutari. Id ſi detur, *corpus omne perſeverabit in ſtatu ſuo quieſcendi, vel movendi uniformiter in directum*, inquit Newtonus, *niſi*

quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare: quod quidem *vis Inertiæ* nomine designavit primo Keplerus, aliique deinde recentiores omnes.

XXXIV.

Hanc *Inertiæ vim* a priori, ut ajunt, demonstrare conati sunt plures, quos inter Eulerus *T. 1. Mech.*: eam alii ab experimentis, & inductione deducere sunt aggressi: utrum id jure sit factum, nec ne, ceteri videant, dumodo *vim* de motibus, atque Astronomia eggregie meritam a Physica exulare non patiantur.

XXXV.

Admissa porro hac Inertiæ vi, supponatur mobile ad motum sollicitari a vi jugiter agente juxta eamdem directionem: quoniam eam mobile per Inertiam retinet determinationem, quam habet, & illi alia jugiter accedit, augebitur perpetuo ipsa ad motum determinatio, proindeque alia atque alia erit mobilis celeritas, quamvis eadem perseveret esse directio. Motus igitur uniformis esse perpetuo desinet, & *difformis* rite appellari potest, ejusque notio a motus æquabilis eruetur negatione.

XXXVI.

XXXVI.

Determinatio autem, quam diximus augeri perpetuo, ita augebitur in hac hypothesi vis perpetuo agentis, ut ea successive crescat. Si enim momento augeri dicatur, cum fieri unico momento nequeat mutatio ex §. XXVI., in eodem mobili binæ eodem momento erunt determinationes ad motum, quæ, si diversæ sunt, ad replicationem, quam a rerum natura excludendam esse docet Inductio, corpus determinaretur: si vero æquales sunt, ita per eam æqualem duplicem determinationem ad motum corpus sollicitaretur, ut in singulis spatii percurrendi locis bis reperiatur singulis momentis, quod quidem haud diversæ replicationis genus est. Hinc celeritas, quæ perpetuo mutatur, ita mutatur, ut successive major fiat.

XXXVII.

Sollicitet jam vis jugiter agens mobile in eadem quidem recta, sed ejus directio illi sit contraria, quam idem habet mobile certa determinatione præditum per Inertiam conservata. Minuetur in hoc casu jugiter determinatio. Eadem enim ratione, qua mobile quiescens juxta eam directionem movetur, in

qua sollicitatur, & eadem de causa, qua augetur determinatio, si directio vis cum directione congruat determinationis, quam retinet per Inertiam; decrescet etiam prior determinatio, si vis contraria directione mobile ad motum impellat. Successivum quinimmo decrementum erit, quemadmodum successivum est incrementum, donec prior determinatio evanescat: quod quidem si contingat, & tamen adhuc vis perseveret, contrariam mobile incipiet inire directionem, ejusque ad motum determinatio augeri.

XXXVIII.

Ex his porro duplex colligitur distinguendus motus *difformis acceleratus*, & *retardatus*. *Acceleratus* dicitur, cum determinatio mobilis jugiter crescit, *retardatus*, cum jugiter minuitur. Quod si temporibus æqualibus æqualia sint determinationum incrementa, seu decrementa, tum motus *uniformiter acceleratus* dicitur, vel *uniformiter retardatus*.

XXXIX.

Superest jam ut alii casus perpendantur, præter eos, quos numeris præcedentibus commemoravimus: cum videlicet vel mobile certa jam præditum determinatione a potentia

urge-

urgetur, cujus directio cum directione jam habitæ determinationis angulum compræhendit; vel idem mobile a pluribus potentiis ad motum sollicitatur juxta diversas directiones, atque in his casibus motus quæritur, qui orietur. Ad hanc autem solvendam quæstionem quasdam aliquorum demonstrationes huc puto non esse advocandas, utpote quæ dubitationibus locum non satis eripiunt, sed assumendum potius cum P. Boscovich *T. 1. Supl. Stay. n.* 199. principium arbitror ratione quidem consentaneum, atque experimentis omnibus; verum ejusmodi ut demonstrari non possit. En autem ipsum principium.

Si mobile urgeatur simul a potentiis quotcumque, quæ singulæ seorsim data quavis directione, & vi agerent, mobile illud in fine cujusvis temporis erit ibi, ubi esset, si singulæ seorsum integrum effectum eadem haberent directione ac magnitudine aliæ post alias totidem æqualibus temporibus, quot ipsæ sunt.

XL.

Hoc posito principio facile determinatur spatium ab hujusmodi mobili percurrendum, & ea rursus deducuntur, quæ supra innuimus cum directio agentis potentiæ contraria

e dia-

e diametro erat, aut prorſus conſpirabat cum directione habitæ determinationis: quocumque vero aſſumantur vires ordine, ſemper mobile poſt idem tempus ad eumdem locum perventurum oſtenditur, quod quidem a Mechanicis omitti plerumque ſolet, cum tamen neceſſario demonſtrandum eſſet.

XLI.

Colligendus vero jam fructus ex iis eſt, quæ de motu hactenus ſunt diſputata, & *Fluxionum* notio tradenda. Statuatur igitur mobile quodlibet a potentiis quibuslibet ſollicitatum, quarum tamen directiones in una eademque ſint recta linea, movebitur mobile rectilineo motu ex §§. præcedentibus, & certa in eo exurget pro quolibet momento ad motum determinatio, quæ, prout refertur, §§. XXIV., XXVII., ad certum ſpatium certo tempore percurrendum, ad ſpatium nempe certa velocitate deſcribendum, generatim dicitur *Fluxio*.

XLII.

Ut autem mobilis iſta ad motum *determinatio* diverſimode conſiderari poteſt; ita etiam aliæ atque aliæ ſtatui poſſunt *Fluxiones*, quæ diverſis *determinationis* rationibus reſpondeant.

XLIII.

XLIII.

Si igitur ea mobilis consideretur *determinatio*, quæ per Inertiam conservata mobili inest post quodcumque tempus, ea dicitur *Fluxio prima*.

XLIV.

In motu ergo æquabili constans hæc erit *Fluxio*, & rite exprimetur per fractionem, quæ ejus exhibet celeritatem, nimirum per $\frac{y}{x}$ ex §. XXXII.

XLV.

In motu difformi ex §. XXXV., & sequente, alia atque alia successive erit *Fluxio prima*, quæ perpetuo augebitur in motu *accelerato*, perpetuo minuetur in *retardato*.

XLVI.

Ideo vero in motu difformi jugiter *prima Fluxio* mutatur, quia jugiter potentia mobile ponitur sollicitare, adeoque mobili successive nova accedere determinatio, quæ vi respondeat. Hæc ipsa autem determinatio, quæ dicitur successive accedere, quæque singulis momentis vi respondet, dicitur *Fluxio secunda*.

XLVII.

Hinc 1.° fit, ut rite vis jugiter mobili appli-

plicata per ejus *fluxionem secundam* exprimatur, cum præsertim vix ulla sit alia eam exprimendi ratio:

2.° Nulla propterea erit in motu æquabili *fluxio secunda*.

3.° In motu difformi accelerato directio *fluxionis secundæ*, & *primæ* non solum in eadem est recta, sed in eamdem etiam plagam, in retardato vero in eadem quidem recta est, sed in plagas oppositas:

4.° Si mobile a quiete moveri incipiat motu difformi accelerato, *fluxio prima* constabit successiva accessione *fluxionis secundæ*, quæ ab Inertia conservata jugiter in mobili accumuletur: si vero mobilis motus fuerit per aliquod tempus æquabilis, tum incipiat accelerari, *fluxio prima* post aliud quodcumque tempus constabit & *fluxione* illa prima, quæ mobili inerat initio motus accelerati, & successiva accessione *fluxionis secundæ* ab Inertia conservata: at si mobile post aliquod tempus motus vel æquabilis, vel accelerati incipiat moveri motu retardato, *fluxio prima* post aliud quodcumque tempus motus retardati, erit differentia inter eam *fluxionem primam*, quam mobile habebat initio retardati, & suc-

cef-

cessivum illum accessum *fluxionis secundæ*, qui pariter ab Inertia ponatur conservari.

XLVIII.

Ex dictis alio etiam modo describi *fluxio secunda* potest, ut *fluxio secunda* pro quolibet motus momento ea dicatur esse determinatio, cujus successivæ accessiones omnes per aliud subsequens quodcumque tempus ab Inertia conservatæ, & vel subtractæ ab ea fluxione prima, quæ habetur eo momento, pro quo fluxio secunda quæritur, vel eidem additæ æquantur illi fluxioni primæ, quæ habebitur post illud assumptum subsequens quodcumque tempus.

XLIX.

Sit motus uniformiter acceleratus, vel retardatus, fluxiones secundæ erunt æquales. Secus determinationum incrementa, vel decrementa æqualia non essent post æqualia tempora. At si motus fuerit difformiter acceleratus, vel retardatus, fluxiones secundæ erunt variabiles, & aliæ poterunt rursus considerari inferiores fluxiones.

L.

Sit igitur variabilis fluxio secunda, sitque per aliquod tempus jugiter major, & eo sen-

su

sit major, quem exposui §. XXIV. Fluxio secunda rationem habebit *quantitatis*, quæ considerari poterit tamquam habita per successivum incrementum aliquo finito tempore per actum, atque ab Inertia conservata. Cum autem reapse fluxio secunda, utpote energía potentiæ, mobili accedat singulis momentis, non finito tempore; ideo, si ea sub *quantitatis* ratione consideretur, tempus aliquod induci debebit, atque confingi, quo determinatio alia nova successive ita ponatur accedere, & ab Inertia conservari, ut ille accessionum acervus æquetur singulis momentis fluxioni secundæ.

LI.

In hac hypothesi si tempus assumptum sit ipsum motus tempus, fluxio secunda sub ea se ratione contemplandam exhibet, sub qua se exhibuit fluxio ipsa prima §. XLVIII., ubi eam tamquam aggregatum consideravimus fluxionum secundarum successive accedentium, quas in mobili conservaret Inertia. Hinc proclivis notio est fluxionis tertiæ, quæ pro quolibet momento ea erit determinatio, cujus accessiones successivæ omnes per aliud tempus subsequens quodcumque ab Inertia

con-

conservatæ, atque additæ illi fluxioni secundæ, quæ habetur eo momento, pro quo quæritur tertia, æquari supponatur illi secundæ fluxioni, quæ post assumptum illud tempus habebitur.

Quod si fluxio secunda supposita fuisset jugiter minor, tum in præcedenti fluxionis tertiæ descriptione non addendæ, sed subtrahendæ fuissent successivæ accessiones novæ illius determinationis. Si vero modo crescat fluxio secunda, modo minuatur, tum modo addendæ, modo subtrahendæ erunt accessiones illæ ab Inertia conservatæ.

LII.

Notandum autem discrimen, quod intercedit inter fluxionem tertiam, & præcedentes. Fluxiones enim primæ, & secundæ in motu difformi vere habentur. Pro fluxione vero tertia confingenda quædam est determinatio certa lege successive accedens, quemadmodum ante præstiti,

LIII.

Jam vero fluxio tertia & ipsa constans esse poterit, vel variabilis. Si constans nulla alia occurret inferior fluxio inquirenda. Si variabilis eodem omnino modo fluxionis quartæ

no-

notio eruetur, atque descriptio ex fluxione tertia, quo ex fluxione secunda deducta notio est fluxionis tertiæ. Hoc pacto procedi potest ad *fluxiones quintas*, *sextas &c.* Donec aliqua fluxio constans occurrat, quod raro contingit. Atque hinc patet eodem modo referri fluxionem primam ad secundam, quo secunda ad tertiam, quo tertia ad quartam &c., & propterea, quæ de prima relate ad secundam dicuntur, ea reliquis inferiorum fluxionum binariis esse communia.

LIV.

Quod si fluxiones præcise considerentur prout ad spatia certo tempore percurrenda referuntur, ex dictis

Patet 1.° spatium a mobili reapse percursum post quodcumque motus tempus, haud aliis determinationibus percursum fuisse, quam iis fluxionibus primis, quæ habitæ sunt singulis momentis motus:

2.° Spatium, quod per solam quemlibet fluxionem primam certo tempore percurreretur, haud aliis fluxionibus pariter percurrendum esse, quam iis fluxionibus secundis, quæ & successive accessere motus habiti tempore, & ab Inertia conservatæ sunt:

3.°

3.° Spatium soli fluxioni primæ post quodcumque motus tempus debitum eodem modo referri ad spatium reapse percursum ; quo spatium debitum cuilibet fluxioni secundæ refertur ad spatium debitum fluxioni primæ, quæ eodem momento habetur. Si igitur methodus aliqua occurrat, cujus ope ex ratione data spatiorum, quæ reapse percurruntur, eruatur ratio spatiorum, quæ cuilibet fluxioni primæ debentur ; eadem erit etiam usurpanda ad eruendam rationem spatiorum, quæ debentur fluxioni cuilibet secundæ ex inventa ratione spatiorum fluxionis primæ. Quod quidem transferendum est, ut supra monebamus, ad quodcumque fluxionum inferiorum binarium.

Atque hæc sunt, quæ de fluxionum notione dicenda mihi erant. Cæterum consuli hac in re possunt Mac-Laurinus *Traitè des Fluxions*, Simpson, & Dissertatio P. Luini: *Oggetto, e Principj del Metodo Flussionario*.

CAPUT SECUNDUM.

Calculus Fluxionum.

Methodus jam inquirenda est, cujus ope fluxionum ratio inveniatur, & calculo subjici possit. Rem omnem Nevtonus Opusc. *de Meth. Flux.* ad duo reducit Problemata.

1.um Data ratione spatiorum, quæ a mobili certis temporibus describuntur, invenire fluxionum rationem:

2.um Data fluxionum ratione spatia ipsa invenire certis temporibus descripta.

LV.

Ut autem a primo incipiam, data ratione spatiorum invenienda erit expressio fluxionis primæ, tum reliquarum fluxionum inferiorum. Atque ut ipsa inquisitio magis perspicua fiat, probe sensus retinendus erit, quo diximus §. XXIV. esse assumendam determinationem, adeoque etiam fluxionem. Fluxio igitur rite exprimetur per illud spatium, quod certo tempore per solam fluxionem percurreretur, & propterea per certam quamdam velocitatem. Evidens enim est mobile, quod per solam fluxionem ad motum determinetur, deferendum esse motu æquabili.

LVI.

LVI.

Sint igitur x ſpatia alicujus motus æquabilis, quæ referant tempus, & ſint y ſpatia mobilis alterius, cujus quæritur fluxio prima: ratio ſpatiorum y ad tempus exprimatur hac æquatione $y = x^n$.

Sit præterea dx tempus, quod immediate ſequitur poſt x, quo deſcribitur y; & ſit dy ſpatium, quod percurritur tempore dx.

His poſitis quoniam ſpatia y ita ſunt comparata tempore x, ut ſit $y = x^n$, loco y ſubſtituendo $y + dy$, & $x + dx$ loco x, habebitur $y + dy = (x + dx)^n$, ex qua ſi ſubtrahatur ſuperior æquatio $y = x^n$, oritur $dy = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}x^{n-3}dx^3 + \ldots\ldots$

& dividendo per dx

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}x^{n-3}dx^2 + \ldots\ldots$$

LVII.

Ex ipſa autem Problematis natura, quæ hic quæritur celeritas ad exprimendam fluxio-

xionem primam, debet esse constans, & proinde, cum celeritas exprimatur per spatium divisum per tempus, juxta §. XXXII., ad hoc ut dy referat spatium per solam fluxionem primam percurrendam tempore dx, & $\frac{dy}{dx}$ referat celeritatem constantem post tempus x; ejus valor debebit esse constans, neque ullo modo pendebit a tempore dx, quo percurritur dy. Delendi igitur in valore $\frac{dy}{dx}$ ii omnes termini erunt, qui continent dx, iique retinendi dumtaxat, in quibus habetur x, & y, quæ post tempus x, & percursum y jam non mutantur amplius. Hoc si fiat, remanet nx^{n-1} pro valore $\frac{dy}{dx}$, & propterea celeritas quæsita, adeoque fluxio prima post quodcumque tempus x erit ut nx^{n-1}, sive $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

LVIII.

Fiat $dx = x$, erit $dy = n.x^n$, quæ si comparetur cum $y = x^n$; dabit $y : dy :: x^n : nx^n :: 1 : n$, nempe spatium percursum a mobili tempore x ad spatium percurrendum æquali tem-

tempore per solam fluxionem primam in ratione $1 : n$.

LIX.

Sit jam generatim data ratio inter spatia y & tempus x, quo ea percurruntur,

$$y^m x^n + y^p x^q + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Eodem modo positis ut ante dy, dx, iisque substitutis in data æquatione, habetur

$$(y+dy)^m (x+dx)^n + (y+dy)^p (x+dx)^q + \ldots\ldots = 0$$

unde subtrahendo priorem æquationem

$$(y+dy)^m (x+dx)^n - y^m x^n$$
$$+ (y+dy)^p (x+dx)^q - y^p x^q + \ldots\ldots = 0$$

Elevatis autem singulis terminis ad eas potestates, quas indicant exponentes, oritur

$$\left(\begin{array}{l} m y^{m-1} dy + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} dy^2 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3} y^{m-3} dy^3 + \ldots\ldots \end{array}\right) x^n$$

$$+ \left(\begin{array}{l} y^m + m y^{m-1} dy \\ + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} dy^2 + \ldots\ldots \end{array}\right) n x^{n-1} dx$$

$$+ \left(\begin{array}{l} y^m + m y^{m-1} dy \\ + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} dy^2 + \ldots\ldots \end{array}\right) \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx^2$$

. . . .

$$+\left(\begin{array}{l} p y^{p-1} dy + \frac{p(p-1)}{2} y^{p-2} dy^2 \\ + \frac{p(p-1)(p-2)}{2.\ 3} y^{p-3} dy^3 + \ldots\ldots \end{array}\right) x^q$$

$$+\left(\begin{array}{l} y^p + p y^{p-1} dy \\ + \frac{p(p-1)}{2} y^{p-2} dy^2 + \ldots\ldots \end{array}\right) q x^{q-1} dx$$

$$+\left(\begin{array}{l} y^p + p y^{p-1} dy \\ + \frac{p(p-1)}{2} y^{p-2} dy^2 + \ldots\ldots \end{array}\right) \frac{q(q-1)}{2} x^{q-2} dx^2$$

. . . .

Transferendo deinde, & dividendo ita transformetur æquatio, ut in primo membro nil aliud habeatur quam $\frac{dy}{dx}$ quodcumque sit futurum alterum membrum. Cum hoc autem peractum fuerit, hujusmodi æquatio habebitur, circa quam idem illud instituendum erit ratiocinium, quod institutum fuit §. LVII. Delendo igitur in altero membro terminos eos omnes, in quibus reperitur dx, aut dy, ex quibus celeritas constans post tempus x, & spatium y non pendet, habetur

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{n y^m x^{n-1} + q y^p x^{q-1} + \ldots\ldots}{m y^{m-1} x^n + p y^{p-1} x^q + \ldots\ldots}, \text{ sive}$$

m x

$$m x^n y^{m-1} dy + p x^q y^{p-1} dy + \ldots\ldots$$
$$+ n y^m x^{n-1} dx + q y^p x^{q-1} dx + \ldots\ldots = 0$$

LX.

Si loco æquationis $y = x^n$, & $y^m x^n + y^p x^q + \ldots\ldots = 0$ fuisset $Ay = Bx^n$, $Ay^m x^n + By^p x^q + \ldots\ldots = 0$, æquatio spatiorum, quæ debentur fluxioni primæ, fuisset $Ady = Bnx^{n-1}dx$, $Amx^n y^{m-1} dy + Bpx^q y^{p-1} dy + \ldots\ldots$ $+ Any^m x^{n-1} dx + Bqy^p x^{q-1} dx + \ldots = 0$, referentibus A, B quæcumque alia data spatia.

Quod si æquationes fuissent

$y = x^n + C$, $Ay = Bx^n + C$

$y^m x^n + y^p x^q + \ldots\ldots + C = 0$, $Ay^m x^n$ $+ By^p x^q + \ldots\ldots + C = 0$, ubi C denotat rursus datum aliquod spatium, æquationes spatiorum, quæ fluxioni primæ deberentur, eædem essent, ac si deesset C.

LXI.

Si vero attente consideretur æquatio

$$m x^n y^{m-1} dy + p x^q y^{p-1} dy + \ldots\ldots$$
$$+ n y^m x^{n-1} dx + q y^p x^{q-1} dx + \ldots\ldots = 0$$

hujusmodi operationum compendium eruitur. 1.° Ordinetur æquatio per y, & singuli ter-

mini per eum exponentem multiplicentur, quem in iis obtinet y, tum omnes ducantur in $\frac{dy}{y}$.

2.° Ordinata eodem modo æquatione per x, & singulis terminis multiplicatis per exponentem, quem in iis habet x, ducantur omnes in $\frac{dx}{x}$.

3.° Utriusque æquationes diversimode multiplicatæ colligatur summa: hæc ea æquatio erit, quæ rationem exprimet inter dy, dx.

LXII.

Sint jam bini motus difformes, qui simul incipiant, eorumque spatia eodem tempore percursa sint y, z, quorum ratio sit $y = z^n$: quæratur quæ sit futura ratio inter eorum fluxiones primas, sive inter spatia debita fluxionibus primis.

Vocentur dy, dz spatia quæ æquali tempore describentur post percursa spatia y, z. Quoniam $y = z^n$, erit etiam $y + dy = (z + dz)^n$, & inde subtrahendo $y = z^n$,

$dy = (z + dz)^n - z^n$, sive

$$dy = n z^{n-1} dz + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} dz^2 + \ldots\ldots,$$

sive

sive $dy : dz :: nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} dz + \ldots : 1.$

Jam vero si dy, dz æquabiliter percurrerentur, ea nimirum essent spatia, quæ solis primis fluxionibus deberentur, eorum ratio nullo modo penderet ab ipsis dy, dz. Igitur delendo eos terminos, qui in binis ultimis proportionis terminis continent aut dz, aut dy, habebitur $dy : dz :: nz^{n-1} : 1$, sive $dy = nz^{n-1} dz$.

LXIII.

Hæc autem, quæ ultimo habita æquatio est, eadem etiam illa est, quæ habita fuisset, si alterum ex elementis incognitis y, z spatium suppositum fuisset exprimere, quod in motu æquabili refert tempus juxta §. LVI., & sequentem.

Quod si generatim æquatio inter hæc spatia binorum motuum difformium esset $y^m z^n + y^p z^q + \ldots\ldots = 0$, eadem rursus æquatio ultimo occurreret, atque §. LIX.

Quandocumque igitur æquatio aliqua habeatur inter dy, dx, non necessario supponendum erit x exhibere spatia motus æquabilis referentis tempus; cum eadem spatia x pertinere

CAPUT SECUNDUM.

Calculus Fluxionum.

METhodus jam inquirenda est, cujus ope fluxionum ratio inveniatur, & calculo subjici possit. Rem omnem Nevtonus Opusc. *de Meth. Flux.* ad duo reducit Problemata.

1.um Data ratione spatiorum, quæ a mobili certis temporibus describuntur, invenire fluxionum rationem;

2.um Data fluxionum ratione spatia ipsa invenire certis temporibus descripta.

LV.

Ut autem a primo incipiam, data ratione spatiorum invenienda erit expressio fluxionis primæ, tum reliquarum fluxionum inferiorum. Atque ut ipsa inquisitio magis perspicua fiat, probe sensus retinendus erit, quo diximus §. XXIV. esse assumendam determinationem, adeoque etiam fluxionem. Fluxio igitur rite exprimetur per illud spatium, quod certo tempore per solam fluxionem percurreretur, & propterea per certam quamdam velocitatem. Evidens enim est mobile, quod per solam fluxionem ad motum determinetur, deferendum esse motu æquabili.

LVI.

LVI.

Sint igitur x spatia alicujus motus æquabilis, quæ referant tempus, & sint y spatia mobilis alterius, cujus quæritur fluxio prima: ratio spatiorum y ad tempus exprimatur hac æquatione $y = x^n$.
Sit præterea dx tempus, quod immediate sequitur post x, quo describitur y; & sit dy spatium, quod percurritur tempore dx.
His positis quoniam spatia y ita sunt comparata tempore x, ut sit $y = x^n$, loco y substituendo $y + dy$, & $x + dx$ loco x, habebitur $y + dy = (x + dx)^n$, ex qua si subtrahatur superior æquatio $y = x^n$, oritur $dy = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} x^{n-3} dx^3 + \ldots\ldots$
& dividendo per dx

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} dx + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} x^{n-3} dx^2 + \ldots\ldots$$

LVII.

Ex ipsa autem Problematis natura, quæ hic quæritur celeritas ad exprimendam fluxio-

1.° Ordinetur proposita æquatio per y, & x, tum singuli æquationum binarum termini per eum exponentem multiplicentur, quem in iis habent y, & x, demum prima æquatio multiplicetur per $\frac{dy}{y}$, secunda per $\frac{dx}{x}$. Habebitur ex prima æquatione

$$my^{m-1}\,dy\,dx + ny^{n-1}\,dy^2 + \ldots$$

ex 2.ª $px^{p-1}\,dx^2 + qx^{q-1}\,dx\,dy + \ldots$

2.° Spatia quæ debentur fluxionibus motuum, quorum spatia sunt dy, dx, spatia nimirum debita fluxionibus secundis motuum, quorum spatia percursa sunt y, x, vocentur ddy, ddx: tum ordinetur æquatio per dy, dx, habebitur

$$dy(y^n + x^q) + y^m\,dx + \ldots$$
$$+ x^p\,dx + \ldots$$

$$dx(y^m + x^p) + y^n\,dy + \ldots$$
$$+ x^q\,dy + \ldots$$

Multiplicentur jam singuli æquationis ita dupliciter ordinatæ termini per eum exponentem, quem in iis habet dy, dx, tum prima ducatur in $\frac{ddy}{dy}$, secunda in $\frac{ddx}{dx}$ habetur.

$ddy\,(y^n + x^q) + \ldots.$

$ddx\,(y^m + x^p) + \ldots.$

3.° Summa omnium æquationum, circa quas hujusmodi operationes institutæ sunt, ea erit æquatio quæsita, quæ referat rationem spatiorum, quæ fluxionibus secundis debentur, nempe

$$\left.\begin{array}{lll} my^{m-1}\,dx\,dy & + ny^{n-1}\,dy^2 & + \ldots \\ px^{p-1}\,dx^2 & + qx^{q-1}\,dx\,dy & + \ldots \\ y^n\,ddy & + x^q\,ddy & + \ldots \\ y^m\,ddx & + x^p\,ddx & + \ldots \end{array}\right\} = 0$$

LXVI.

Si in præcedentibus operationibus ponatur x exhibere tempus, tum spatia x erunt spatia motus alicujus æquabilis, cujus nulla est fluxio secunda ex §. XLVII., adeoque $ddx = 0$, $y^m\,ddx + x^p\,ddx + \ldots = 0$.

LXVII.

Ad inveniendas fluxiones tertias, quartas &c. eadem est mothodus adhibenda, eademque usurpatur spatiorum denominatio. Positis enim y, x spatiis percursis a binis mobilibus, positisque dy, dx, ddy, ddx spatiis debitis eorum fluxionibus primis, & secun-

dis,

dis, erunt d^3y, d^3x, d^4y, d^4x &c. ſpatia debita eorum fluxionibus tertiis, & quartis &c. Adnotationes autem, quæ §. LX. inſtitutæ ſunt pro ſpatiis dy, dx, reliquis etiam cæterarum fluxionum ſpatiis ſunt communes.

LXVIII.

Supereſt nunc problema alterum initio Capitis commemoratum ex Nevtono, quod *Calculum Integralem* comprehendit. Verum ut illud pro rei dignitate tractetur, integra volumina requiruntur, accedit etiam quod plurima a recentioribus deſcripta proſtant. Ne igitur actum agam, neve illud prorſus ſilentio prætercam, methodi, cujus fundamenta paſſim occurrunt apud Integralis calculi tractatores, uſum oſtendam in binomiis, & trinomiis integrandis, & ſerie obtinenda pro integratione cujuſcumque Multinomii.

LXIX.

Sit $dy = x^{\pm r} dx X^n$, cumque exponens r eſt poſitivus, ſit $X = fx^m + gx^{m'} + hx^{m''} + \ldots\ldots$, cum negativus eſt, $X = f + gx^m + hx^{m'} + ix^{m''} + \ldots\ldots\ldots$ Inter exponentes m, m', m'', ... in primo caſu m ſit maximus, in ſecundo minimus, in utroque coefficientes ſint quicumque.

LXX.

LXX.

Cum sit $S\,dy = y$, primi membri integratio nulla indiget investigatione.

Ad integrandum membrum alterum ponatur 1.°

$$S x^{\pm r} dx X^n = A x^u X^{n+1} + S Y dx X^n (M)$$

& quantitas X constans, variabilis Y, exponens u debeant in decursu determinari.

2.° Sumantur in utroque membro fluxiones, & instituatur divisio, vel multiplicatio per $dx X^n$ prout opus erit, ut habeatur

$$x^{\pm r} = A u x^{u-1} X + \overline{n+1} \,.\, A x^u \frac{dX}{dx} + Y.$$

3.° Loco X, & $\frac{dX}{dx}$ substitutis respondentibus valoribus ex ipso proposito Multinomio erutis, & posito $n + 1 = n'$, si exponens r afficitur signo positivo, habetur

$$x^r = \begin{cases} A u f x^{m+u-1} + A m n' f x^{m+u-1} \\ A u g x^{m'+u-1} + A m' n' g x^{m'+u-1} \\ A u h x^{m''+u-1} + A m'' n' g x^{m''+u-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Y \end{cases}$$

Si vero fuerit $- r$,

. . . .

Aufx

$$x^{-r} = \begin{cases} A u f x^{u-1} \\ A u g x^{m+u-1} + A m n' g x^{m+u-1} \\ A u h x^{m'+u-1} + A m' n' g x^{m'+u-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Y \end{cases}$$

LXXI.

Ponatur in 1.° casu $m + u - 1 = r$, $A u f + A m n' f = 1$, erit $u = r + 1 - m$

$$A = \frac{1}{(r + 1 - m + m n')f}$$

$$A u g + A m' n' g = \frac{(r + 1 - m + m' n')g}{(r + 1 - m + m n')f} = B$$

$$A u h + A m'' n' h = \frac{(r + 1 - m + m'' n')h}{(r + 1 - m + m n')f} = C$$

. . . .

Hinc $x^r = x^r + B x^{m' + r - m}$

$+ C x^{m'' + r - m} + \ldots\ldots + Y$, sive

$Y = - B x^{m' + r - m} + C x^{m'' + r - m} + \ldots\ldots$

Ponatur in 2.° casu $u - 1 = r$, $A u f = 1$, habebitur $u = 1 - r$

$$A = \frac{1}{(1 - r)f}$$

$$A u g + A m n' g = \frac{(1 - r + m n')g}{(1 - r)f} = B$$

$$A u h + A m' n' h = \frac{(1 - r + m' n')h}{(1 - r)f} = C$$

. . . .

Hinc

Hinc $x^{-r'} = x^{-r} + B x^{m-r} + C x^{m'-r} + \ldots + Y$, sive
$Y = - B x^{m-r} + C x^{m'-r}$.

LXXII.

Substitutis jam in M pro A, Y, u valoribus inventis, in 1.° casu habetur

$$S x^{r} dx X^{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{(r+1-m+mn')f} x^{r+1-m} X^{n+1} \\ -S\dfrac{(r+1-m+m'n')g}{(r+1-m+mn')f} x^{m'+r-m} dx X^{n} \\ -S\dfrac{(r+1-m+m''n')h}{(r+1-m+mn')f} x^{m''+r-m} dx X^{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

In 2.°

$$S x^{-r} dx X^{n} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-r)f} x^{1-r} X^{n+1} \\ -S\dfrac{(1-r+mn')g}{(1-r)f} x^{m-r} dx X^{n} \\ -S\dfrac{(1-r+m'n')h}{(1-r)f} x^{m'-r} dx X^{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

LXXIII.

Generatim autem positis in 1.° casu

$1 - m + mn' = a$ & $1 - m = q$
$1 - m + m'n' = a'$ $m' - m = q'$
$1 - m + m''n' = a''$ $m'' - m' = q''$
$\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots$

In secundo

$1 = a$ & $1 = q$

$1 + mn' = a'$ $m = q'$

$1 + m'n' = a''$ $m' = q''$

. . . .

habetur pro utroque casu

$$S x^{\pm r} dx X^n = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q} X^{n+1} \\ - S \frac{(\pm r + a') g}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q'} dx X^n \\ - S \frac{(\pm r + a'') h}{(\pm r + a) f} x^{\pm r + q''} dx X^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right) = N$$

LXXIV.

Quoniam termini affecti signo integrationis S ii sunt, per quos exhibetur valor Y: & Y præterea immediate habetur ex dato polynomio X; si in eo termini fint $t + 1$, termini nondum integrati in N erunt numero t.

LXXV.

Sit X binomium, nempe aut $fx^m + g$, aut $f + gx^m$, prout fuerit exponens r, unicus erit in N terminus nondum integratus; nimirum

— S

$$-S\frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}x^{\pm r+q'}dx\,X^n$$

Si in N loco $\pm r$ substituatur $\pm r+q'$, singulique termini ducantur in $-\frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}$ habebitur

$$-S\frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f}x^{\pm r+q'}dx\,X^n$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)\,(\pm r+q'+a)f^2}\\ \times x^{\pm r+q+q'}X^{n+1}\\ +S\dfrac{(\pm r+a')\,(\pm r+q'+a')g^2}{(\pm r+a)\,(\pm r+q'+a)f^2}\\ \times x^{\pm r+2q'}dx\,X^n\end{cases}$$

atque hoc valore substituto in N loco termini nondum integrati, oritur

$$Sx^{\pm r}dx\,X^n=\begin{cases}\dfrac{1}{(\pm r+a)f}x^{\pm r+q}X^{n+1}\\ \dfrac{-(\pm r+a')g}{(\pm r+a)\,(\pm r+q'+a)f^2}\\ \times x^{\pm r+q+q'}X^{n+1}\\ -S\dfrac{(\pm r+a')\,(\pm r+q'+a')g}{(\pm r+a)\,(\pm r+q'+a)f^2}\\ \times x^{\pm r+2q'}dx\,X^n\end{cases}$$

Quod ſi eadem inſtituatur operatio circa hunc poſtremum terminum nondum integratum, eademque rurſus circa eum, qui obtinebitur nondum integratus, orietur ſeries terminorum integratorum, inter quos terminus s^{esimus} erit

$$\pm \frac{(\pm r + a')\ (\pm r + q' + a')\ (\ldots\ldots)}{(\pm r + a)\ (\pm r + q' + a)\ (\ldots\ldots)}$$

$$\times \frac{(\pm r + \overline{s-2}\,.\,q' + a')\,g^{s-1}}{(\pm r + \overline{s-1}\,.\,q' + a)\,f^{s}}$$

$$\times\, x^{\pm r + \overline{s-1}\,.\,q' + q}\ X^{n+1}$$

appoſito ſigno poſitivo terminis imparibus, negativo paribus. Quod ſi alicubi ad arbitrium ſit ſeries abrumpenda exempli cauſa poſt terminum s^{esimum}, poſito $\pm P$ coefficiente termini ipſius s^{esimi} erit addendus terminus $\pm SP\,(\pm r + \overline{s-1}\,.\,q' + a')\,g\,x^{\pm r + sq'}\,dx\,X^{n}$.

LXXVI.

Abrumpitur vero ſponte ſeries, neque ullus erit alius terminus nondum integratus addendus, ſi fuerit $\pm r + \overline{s-1}\,.\,q' + a' = 0$, nimirum $r = sm - 1$, cum r aſficitur ſigno poſitivo, $-r = -sm - nm - 1$, cum aſficitur negativo.

LXXVII.

Identidem contingit, in denominatore termini alicujus jam integrati fieri unum ex factoribus $=0$, cum scilicet $\pm r + \overline{s-1}.q' + a = 0$. In hoc casu ante series erit abrumpenda, quam hujusmodi terminus occurrat, & addendus, ut supra, terminus nondum integratus. Sit hic terminus, posito $+r$, $S\mathfrak{Q}x^{r-sm}dxX^n$, quando vero est $-r$, $S\mathfrak{Q}x^{sm-r}dxX^n$, generatim $S\mathfrak{Q}x^{\pm r\mp sm}dxX^n$. Is integrabitur, terminique integrati erunt numero p, si, cum exponens fuerit positivus, sit $r=(p+s)m-1$: cum exponens negativus fuerit, sit $-r=-(p+s)m-1-nm$.

LXXVIII.

Sit X trinomium, ex §. LXXIV. duo erunt termini nondum integrati. Quod si fuerit $\pm r + a'' = 0$, series eadem omnino erit, atque in binomio. At si fuerit $\pm r + a' = 0$ ad habendam seriem, & terminum generalem nondum integratum addendum, nil aliud erit agendum, quam in iis, quæ ad binomium spectant, loco a', q' substituere a'', q''.

LXXIX.

In utroque casu ut trinomium integretur

duplex erit conditio: in 1.°

$$\pm r + a'' = 0, \pm r + \overline{s-1}.q' + a' = 0.$$

In 2.° $\pm r + a' = 0, \pm r + \overline{s-1}.q'' + a'' = 0.$

Cum autem exponentes m, m' sint quicumque, patet easdem conditiones efficere, ut quadrinomium integretur, si prius methodis consuetis eliminetur unus ex ejus terminis, ita ut residui sint tres dumtaxat.

LXXX.

Ut autem series obtineatur pro integratione cujuscumque Multinomii, supponantur in eo exponentes in progressione arithmetica. Facili enim prorsus ratione hæc conditio in datum quodcumque Multinomium inducitur per simplicem substitutionem alius incognitæ, cujus summa cum alia quacumque cognita æquetur incognitæ, quam continet Multinomium ipsum, quod datur.

Sit igitur, cum r est positivus, $X = fx^m + gx^{m-1} + hx^{m-2} + \ldots$, cum r est negativus, $X = f + gx^m + hx^{m+1} + ix^{m+2} + \ldots$

Ponatur in 1.° casu

$a = 1 - m + n'm$ & $q = 1 - m$

$a' = 1 - m + n'(m-1)$, $q' = -1$

$a'' = 1 - m + n'(m-2)$ $2q' = -2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $3q' = -3$

$\ldots\ldots\ldots$ In

In 2.° casu

$a = 1$	& $q = 1$
$a' = 1 + n' m$	$q' = m$
$a'' = 1 + n'(m+1)$	$2q' = m+1$
$a''' = 1 + n'(m+2)$	$3q' = m+2$
. . . .	. . . .

LXXXI.

His positis loco formulæ N §. LXXIII., habebitur

$$Sx^{\pm r} dx X^n = \begin{cases} \frac{1}{(\pm r+a) f} x^{\pm r+q} X^{n+1} \\ -S\frac{(\pm r+a')g}{(\pm r+a)f} x^{\pm r+q'} dx X^n \\ -S\frac{(\pm r+a'')h}{(\pm r+a)f} x^{\pm r+2q'} dx X^n \\ -S\frac{(\pm r+a''')i}{(\pm r+a)f} x^{\pm r+3q'} dx X^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

LXXXII.

Si circa hanc formulam eædem instituantur operationes, quæ supra circa binomium, eruetur series quæsita. Sed quoniam operosus est calculus, compendium præsto est.

1.° Disponantur per columnas plures quantitates, ut in sequenti tabella

$$\begin{array}{llll} A - A' + A'' - A''' + \dots\dots \\ \quad - B + B' - B'' + \dots\dots \\ \quad\quad + C - C' + \dots\dots \\ \quad\quad\quad - D + \dots\dots \end{array}$$

2.° Posito $t+1$ numero terminorum Multinomii, quantitatum numerus in quaque columna sit ejusmodi, ut in 1.ª sit unicus, in 2.ª t, in 3.ª $2t-1$, in 4ª $3t-2$, in s^{esima} $\overline{s-1}\,.\,t-\overline{s-2}$.

3.° Columnæ primæ, tertiæ &c., & generatim columnis, quarum numerus est impar, præfigatur signum positivum, columnis, quarum numerus est par, negativum.

LXXXIII.

4.° Sit una eademque omnium, cujusque columnæ terminorum lex, ut, facto $A = \frac{1}{(\pm r + a)f}$, & denotante p terminum quemlibet in quaque columna, in qua primus statuatur is, qui in linea prima horizontali reperitur, terminus, qui in columna s^{esima} obtinet locum p, æquetur summæ terminorum, qui in columna præcedente obtinent locum p, $p-1$, $p-2$, ..., $p-t$, in certum factorem ductorum. LXXXIV.

LXXXIV.

5.º Factor autem, qui prædictos terminos multiplicat, pro terminorum diversitate diversus sit, atque hæc sit ejus lex, ut cum terminus efformandus obtinet locum p in columna s^{esima}, si terminus multiplicandus per hunc factorem sit primus in columna præcedente, factor sit

$$\frac{(\pm r + (s+p-3)q' + a')g}{(\pm r + (s+p-2)q' + a)f}$$

si 2.us

$$\frac{(\pm r + (s+p-4)q' + a'')h}{(\pm r + (s+p-2)q' + a)f}$$

si 3.us

$$\frac{(\pm r + (s+p-5)q' + a''')i}{(\pm r + (s+p-2)q' + a)f}$$

& sic deinceps.

LXXXV.

His ita positis ad habendum seriem quæsitam quisque cujusque columnæ terminus multiplicetur per

$$x^{\pm r + q + (s+p-2)q'} X^{n+1}$$

& prima columna dabit primum seriei terminum, 2.a secundum, 3.a tertium &c.

Quod si alicubi sit series abrumpenda, multiplicetur terminus quisque p sequentis columnæ per

$S(\pm r+(s+p-2)(q'+a)fx^{\pm r+(s+p-2)q'}dxX^n$

LXXXVI.

Quod si §. LXXI. exponens r suppositus fuisset æqualis cuilibet alii exponenti terminorum, quorum summa cum Y æquatur $x^{\pm r}$, alia series haberetur diversa magis, aut minus convergens.

LXXXVII.

Si autem $Sx^{\pm r}dxX^n$ integrari nequeat, formula M §. LXX. alius problematis solutionem suppeditat. Cum enim ibi sit $Sx^{\pm r}dxX^n - SYdxX^n = Ax^n X^n$, eadem retinenda est methodus ad inveniendam quantitatem $SYdxX^n$, quæ addita vel subtracta a data quantitate $Sx^{\pm r}dxX^n$ summam efficiat, vel differentiam ejusmodi ut integrari possit. Plura de hoc problemate hic addere non est animus, vide T. 3. *Sçavans étrangers*.

CA-

CAPUT TERTIUM.

De usu fluxionum in curvis, quarum ordinatæ sunt invicem parallelæ.

QUæ de fluxionibus dicta sunt hactenus, ea usum habent amplissimum in curvarum indole, itu, & reditu investigandis. Ex curvis aliæ sunt, quæ vocantur *Algebricæ*, aliæ, quæ *Transcendentes* dicuntur. Illæ vocantur Algebricæ, in quibus ratio binarum rectarum, quæ pro curvæ punctorum diversitate certam sortiuntur positionem, per algebricam æquationem exprimitur: illæ vero Transcendentes, in quibus hujusmodi rectarum ratio nulla finita algebrica æquatione potest exhiberi. De primis tantum instituam quæstionem, deque iis primo, quarum ordinatæ sunt invicem parallelæ. Coordinatarum autem angulum rectum esse supponam. Facile enim per solam Algebram Cartesianam, si coordinatarum angulus rectus non sit, alia abscissarum linea reperitur, cum qua rectum angulum ordinatæ comprehendant.

LXXXVIII.

Supponantur duo mobilia *Y*, *X*, quorum alterum *X* ab origine abscissarum *A*, *fig.a* 1.a



& 2.ª, moveatur motu quocumque ex *A* versus *C*, generetque interea ipsam abscissarum lineam *AC*, quam *axem* vocabo: alterum vero *Y* motu pariter quocumque moveatur ex *A* versus *a* in recta *Aa* axi perpendiculari, quæ ita supponatur parallelo motu transferri ex *A* versus *C* simul cum *X*, ut ex hac translatione nullo modo motus ipsius *Y* perturbetur.

LXXXIX.

Dum hæc ita fieri supponuntur, aliqua linea generabitur ab *Y*, quæ incipiet ab *A*, & jacebit in angulo *CAa*. Pervenerit enim *X* in *B*, rectæque *Aa* positio sit juxta *BD*: percurrerit interea *Y* spatium *BD*, erit igitur *Y* in *D*. Intermedio autem quolibet momento idem *Y* alicubi erat in linea translata per aream anguli *CAa*, initio vero motus erat in *A*. Ergo *Y* aliquam lineam *AD* generavit ex §. XV., quæ incipit ab *A*, & jacet in angulo *CAa*.

XC.

Quodcumque sit punctum *D*, ratio spatiorum *AB*, *BD* eadem sit ubique, linea generata erit recta. Hanc enim sola recta sibi vindicat proprietatem. At si ea ratio perpetuo varietur, linea *AD* a recta perpetuo de-

fle-

flectet, directionemque jugiter mutabit, & proinde erit curva ex §. XVIII., & seqq.

XCI.

Cum autem *AD* est recta, si *X* æquabiliter movetur, æquabili itidem motu deferatur *Y* necesse est. Secus eadem ubique esse nequiret ratio spatiorum *AB*, *BD*. Si vero *X* difformi moveatur motu, eadem de causa æque difformiter moveatur oportet *Y*. Hinc cum *AD* est curva, uterque ex his binis motibus *X*, *Y* diversimode difformis esse debet, sin minus alter æquabilis, alter vero difformis.

XCII.

Ex hoc curvas generandi modo illud sponte fluit datam curvæ æquationem, quæ rationem exhibet ascissarum, & ordinatarum, quas vocabo x, y, perinde esse considerandam, ac si duorum motuum spatia referret eodem tempore percursa, quemadmodum præstitimus in capite 2.° Id si fiat *directa methodus Tangentium* immediate habetur.

XCIII.

Moveatur *X* æquabiliter, *Y* difformiter, & æquatio spatiorum x, y sit $xy^m = bx^n$: queratur tangens curvæ *AD* in puncto *D*.

Cum

Cum tangens ex §. XXI. ea sit recta, quæ ducitur juxta directionem illam, quam Y mutat in singulis curvæ punctis: cumque ideo mutetur ex §. CXI. directio, quia difformis est motus Y curvam generantis; nulla directionis fiet mutatio in D, si Y ex eo puncto incipiet moveri æquabiliter, per solam videlicet eam fluxionem primam, quam ibi habet, & directio propterea, quam inibit, ea est, quam mutaret Y, si ejus motus perseveraret esse difformis, directio nimirum tangentis. Ad inveniendam igitur tangentem puncti D ea recta invenienda est, quam describeret Y, si etiam Y præter X æquabiliter deferretur. Ratio porro spatiorum, quæ solis fluxionibus primis mobilium X, Y æquali tempore percurrenda, ex dictis cap. antecedente, est $\frac{dy}{dx} = \frac{nbx^{n-1}}{may^{m-1}}$. Hinc ductâ ex puncto D rectâ DN axi parallelâ, & ex ejus quolibet puncto E elevatâ Et ipsi DN perpendiculari, atque ejusmodi ut $\frac{Et}{DE} = \frac{dy}{dx} = \frac{nbx^{n-1}}{may^{m-1}}$, si per puncta D, t ducatur recta Dt, ea erit tangens puncti D.

XCIV.

Quoniam vero data ratione ſpatiorum, quæ eodem tempore a binis motibus percurruntur, ratio fluxionum, quæ eruitur, eadem prorſus eſt, vel alterutrum ex mobilibus, vel neutrum æquabili præditum motu ſupponatur, juxta §. LXIII; in curva *AD* generanda, & ejus puncti *D* tangente invenienda, non erit *X* neceſſario ſupponendum deferri motu æquabili, neque verendum ne in alia ſuppoſitione alia ſpatiorum dy, dx ratio obtineatur, aliaque proinde tangentis poſitio.

XCV.

Diverſa autem ſigna quantitatibus præfixa diverſitatem directionum exhibere nemo non novit. Hinc poſitis $+y$, $+x$, cum ordinatæ ex *AC* tendunt verſus plagam *a*, & abſciſſæ ex *A* verſus *C*, poſitiſque $-y$, $-x$ cum & ordinatæ, & abſciſſæ contrariam habent directionem, ſi $\frac{Et}{DE} = \frac{-nbx^{n-1}}{may^{m-1}}$, aſſumenda quidem eſſet, ut ante, *DE* ex *D* verſus *N*, ſed *Et* erit ſumenda ex *E* verſus *AC*: Quod ſi haberetur $\frac{Et}{DE} = \frac{nbx^{n-1}}{-may^{m-1}}$,

tum

tum ſumptâ DF ex D in plagam oppoſitam, Et retineret directionem eamdem ex F verſus a recedendo ab AC. Quia vero $\frac{-nbx^{n-1}}{may^{m-1}} = \frac{nbx^{n-1}}{-may^{m-1}}$, utriuſque caſus conſtructio eodem tandem recidet.

XCVI.

Producatur jam tangens tD donec alicubi occurrat in T axi AC. Cum triangula TBD, DEt ſint ſimilia, erit BT, quæ dicitur *Subtangens* $= \frac{BD \times DE}{Et} = \frac{ydx}{dy}$. Hinc ſi nota ſit ſubtangens nullo negotio determinabitur tangens. Dato autem puncto D, detur neceſſe eſt aut y, aut x, cujus valore ſubſtituto pro y, aut x in data æquatione, altera etiam ex incognitis eruetur. Subſtitutis domum valoribus pro x, y, in $\frac{dx}{dy} = \frac{nbx^{n-1}}{may^{m-1}}$, & valoribus jam inventis ſubſtitutis pro y, & $\frac{dx}{dy}$ in $\frac{ydx}{dy}$, habebitur ſubtangens.

XCVII.

Plures in tangentium poſitione determinanda oboriri caſus poſſunt, qui difficultatis

ſpe-

speciem præseferre videntur. Primus casus est cum $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{o}$, ubi P est functio quævis x, y pendens ab æquatione curvæ, quæ supponatur dari. Erit igitur $dx = \frac{dy}{P} \times o = o$, adeoque nullum erit spatium fluxioni primæ mobilis Y debitum; nullaque ipsa ejus prima fluxio. Hinc si punctum, cujus quæritur tangens sit D, nulla erit DE, & sumenda erit Et in ipsa ordinata BD producta, quæ simul erit tangens. Perseverat enim in hoc casu moveri Y in Aa, quæ cessat transferri, cessante motu X, cujus nulla est fluxio prima, perseverat inquam Y moveri, quia dy non est $= o$. Igitur directio, juxta quam moveretur Y post D in hoc casu, esset in BD ex D recedendo a B, adeoque tangens axi perpendicularis.

XCVIII.

Hinc vero patet non semper supponi posse deferri Y æquabili motu. Cum enim fluxio prima motus æquabilis sit constans ex §. XLIV., nullibi esse potest $= o$.

XCIX.

Casus alter est cum $\frac{dy}{dx}=\frac{o}{Q}$, ubi Q est rursus functio quælibet x, y pendens ab æquatione curvæ propositæ. Erit igitur

$dy=\frac{dx}{Q}\times o=o$, adeoque nulla fluxio mobilis Y, nullumque spatium illi debitum. Perseverante autem in hoc casu motu X, & simul translata Aa, describet Y rectam axi parallelam, & tangens erit eidem axi parallela, ordinatis perpendicularis.

C.

Casus postremus est cum $\frac{dy}{dx}=\frac{o}{o}$, qui quidem innuere videtur nullas esse debere pro dato puncto D rectas DE, Et, nullamque Dt, cum tamen in quolibet cujuscumque curvæ puncto aliqua sit oporteat directio, quæ mutetur, & aliqua propterea tangens. Ut igitur exponam, quid sibi calculus velit in hoc casu, altius res est repetenda, & huc revocandum celebre Huddii Theorema, quod primo demonstravit Saurinus.

Si æquatio continens plures factores æquales numero m per aliquod ejus elementum ordi-

ordinetur, & ii sufficiantur termini, qui desunt, posito eorum coefficiente æquali nihilo, tum singuli ejus termini per terminos seriei cujuscumque arithmeticæ multiplicentur, ea in aliam transformabitur, in qua factores æquales erunt numero $m-1$.

CI.

Hoc posito duo eruuntur: 1.° unde propositus casus oriatur: 2.° quomodo in hoc casu operandum sit.

Sit enim æquatio quævis $H=0$, in qua incognitæ sint y, x, sintque in H factores æquales numero m, quorum quisque erit $=0$, cum sit $H=0$. Cum ad habendam fluxionum rationem ex §. LXI. bis ordinanda æquatio sit semel per y, & semel per x, & singuli deinde termini in illum exponentem sint ducendi, quem in singulis habent aut y, aut x, prout ordinatur aut per y, aut per x; Si rite hujusmodi operationes perpendantur, constat 1.° seriem arithmeticam exponentes conficere, si termini illi sufficiantur, qui desunt, 2.° in utraque æquationis ejusdem diversa tractatione idem perinde fieri, ac si æquatio per seriem arithmeticam multiplicetur.

CII.

Ponatur igitur ex prima ordinatione æquationis per y oriri $I\,dy^{i}$, ex secunda $L\,dx$, ubi litteræ majores I, L denotant functiones x, y pendentes ab H: erit 1.° ex citato §. LXI. $I\,dy + L\,dx = 0$; 2.° tam $I\,dy$, quam $L\,dx$ ex Huddii Theoremate continebunt factores æquales numero $m-1$, quorum quilibet $= 0$, & propterea $I\,dy = 0$, $L\,dx = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{L}{I} = \frac{0}{0}$. En igitur fons hujusmodi casus, qui nimirum tum habetur, cum proposita æquatio H factores plures æquales continet.

CIII.

Ex his autem methodus operandi eruitur pro hoc casu. Quoniam enim $I = 0$, $L = 0$, considerari I, L poterunt tamquam totidem æquationes, ex quibus ratio fluxionum dy, dx eodem modo sit deducenda, quo deduximus pro H. Ponatur igitur oriri

ex I $\quad M\,dy + N\,dx$

ex L $\quad O\,dy + P\,dx$.

His substitutis loco I, L in $I\,dy + L\,dx = 0$, habetur

$$M\,dy^{2} + (N + O)\,dy\,dx + P\,dx^{2} = 0$$

sive

sive $\frac{dy}{dx} = \frac{-(N+O) \pm \sqrt{4MP-(N+O)^2}}{2M} = \frac{Q}{R}$.
Jam vero per idem Huddii Theorema M, N, O, P continent factores æquales $m-2$; hinc & singulæ illæ functiones erunt æquales nihilo, & præterea $Q = 0$, $R = 0$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{R} = \frac{0}{0}$. Hinc eodem modo operandum rursus erit, eædemque erunt repetendæ operationes circa $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{R} = \frac{0}{0}$, idque toties, quot in m sunt unitates. Per singulas enim operationes unus tantum eliminatur factor, cujus cujuslibet præsentia fit $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$.

CIV.

Ex hac operandi ratione colligitur eodem prorsus modo habitum iri æquationem

$$Mdy^2 + (N+O)dxdy + Pdx^2 = 0$$

ac si in æquatione $Idy + Ldx = 0$, suppositis constantibus fluxionibus primis, quarum spatia sunt dy, dx, fluxionum earumdem ratio quæsita consueto modo fuisset. Hinc quando contingat $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = \frac{L}{I}$, sumpta æquatione $Idy + Ldx = 0$ toties suppositis con-

stantibus dy, dx ratio fluxionum primarum inquirenda est, donec cesset esse $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, quot nimirum sunt æquales factores in H.

CV.

Immo si operationes compendii gratia præscriptæ §. præced. considerentur, patet ex $Idx + Ldx = 0$ habitum rursus iri

$$Mdy^2 + (N+O)dydx + Pdx^2 = 0$$

etiamsi ex ea immediate inventa fuisset ratio fluxionum secundarum alterutro tantum, vel etiam neutro ex spatiis dy, dx habito pro constanti. Habita enim fuisset æquatio $Mdy^2 + Iddy + (N+O)dydx + Lddx + Pdx^2 = 0$ in qua cum sit $I = 0$, $L = 0$, delendi fuissent termini $Iddy$, $Lddx$.

CVI.

Superest jam ostendendum, qua tandem ratione fieri possit, ut hic idem casus occurrat in tangentium positione determinanda. Illud enim obesse primo intuitu videtur, quod nulla sit curva, cujus generalis æquatio ullum factorem contineat, nedum plures æquales. Verum difficultas omnis evanescet, si itus, & reditus, quos eadem curva habere potest, considerentur.

Sint

Sint plures ejusdem curvæ rami, *fig.*ª 3.ª, quorum singuli transeant per idem punctum D; posita abscissa AC tres sint ordinatæ CE, CF, CG, posita vero abscissa AB, unica sit ordinata BD. Si in hoc casu quæratur $\frac{dy}{dx}$ pro puncto D, ter saltem habebitur

$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, adeoque tres saltem factores æquales continebit æquatio. Sit enim æquatio curvæ H, si in ea loco x substituatur AC, cum tres ibi sint ordinatæ, triplex erit valor y; cumque inæquales sint CE, CF, CG, inæquales inter se erunt tres illi valores, adeoque tres, eosque inæquales factores continebit H. Posita autem $x=AB$, tres rursus valores habebit y, quia eadem est æquatio, sed cum unica sit ordinata, tres illi valores erunt æquales, & proinde tres æquales factores continebit H. Hinc si ter fuerit $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, & triplex sit valor ultimo habitus

pro $\frac{dy}{dx}$, totidem erunt tangentes pro puncto D, & totidem propterea ejusdem curvæ rami transibunt per D.

CVII.

Porro factores æquales ejusdem æquationis *H* pro dato puncto plures esse queunt, quin tamen æque multiplex sit valor, quem demum obtinet $\frac{dy}{dx}$. In hoc autem casu tangentes pariter totidem non sunt, quot factores æquales, adeoque neque totidem rami transeunt per *D*, quod quidem tamquam mysterium quoddam curvarum habitum a pluribus est. Verum ut mysterium omne tollatur supponatur cum Maupertuisio, Act. Acad. Paris. ad annum 1729., recta *MN*, *fig.*[a] 4.[a] sæpius eidem curvæ occurrens in punctis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*...., sintque hæc puncta quæcumque. Supponatur deinde punctum *C* ita accedere ad *D*, ut tandem cum eo coincidat evanescente arcu intermedio *CD*, eodemque modo supponantur alia quotlibet puncta *B*, *E* compenetrari cum *D* positis nihilo æqualibus intermediis arcubus. In hoc casu unicum punctum *D* vices obibit totidem punctorum, quot supposita sunt compenetrari cum *D*, & propterea ordinata, quæ ducatur ex puncto *D* totidem pariter ordinatarum vices obibit. Hinc si factores æquales sint

nu-

numero m, valores autem pro $\frac{dy}{dx}$ numero $m-1$; ramorum transitus per D erunt n.° $m-1$, & præterea punctum D supponendum erit tamquam habitum ex compenetratione alius curvæ puncti: si valores sint $m-2$, totidem erunt rami, & punctum D triplicis curvæ puncti fungetur munere, atque ita porro.

CVIII.

Hujusmodi vero puncta D, *fig.*[a] 4.[a], generice vocantur puncta *multiplicia singularia*. Generaliter punctum illud dicitur *multiplex*, in quo occurrit $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, & duplex est si duo sint factores æquales, triplex si tres &c.

CIX.

His ita constitutis circa tangentium positionem, lineæ alterius descendit constructio, cujus ordinatæ referant spatia dy, quæ pro quolibet puncto fluxionibus primis Y debentur. In *fig.*[is] 1.[a] & 2.[a] pro omnibus curvæ AM punctis ductæ supponantur tangentes Dt, rectæ DN parallelæ abscissis, atque ordinatæ BD, tum ubique ita assumantur DE, Et, ut æqualibus temporibus percurrantur

per

per fluxiones primas Y, X. Ex singulis deinde ordinatis BD ex B versus D, si dy afficitur signo positivo juxta §. XCV., vel ex parte opposita, si dy afficiatur signo negativo abscindatur BD' æqualis illi Et, quæ puncto curvæ respondet, ex quo ducitur ordinata. Id si fiat pro omnibus curvæ punctis, nova linea AM' enascitur, cujus ordinatæ BD' referent spatia æqualibus temporibus per fluxiones primas mobilis Y percurrenda.

CX.

Quæcumque sit futura linea $A'M'$, illa semper eo modo generata poterit supponi, quo generatur AM, supponendo nimirum aliud mobile Y' delatum in Aa, quæ perseveret transferri ut ante cum X, & ejus æquatio ea erit, quæ refert rationem fluxionum secundarum mobilis Y.

CXI.

Porro cum spatia dy sunt constantia, sive cum fluxiones primæ Y eædem semper sunt, alia esse nequit $A'M'$, quam recta axi parallela. Alio enim modo esse non potest constans assumpta BD'. Quod si pro diversitate punctorum D diversæ sint fluxiones primæ, tum $A'M'$ poterit esse vel recta, vel

cur-

curva. Recta quidem tum erit, cum $\frac{dy}{dx} = \frac{Et}{DE}$ rationem ubique constantem habet, curva, si hujusmodi ratio perpetuo varietur.

CXII.

Sit *A' M'* curva, eadem prorsus methodus est pro ejus tangente ad quodlibet punctum *D'* determinanda. Ponatur igitur *D' t'* tangens puncti *D'* ductaque *D' N'* parallela *D N*, ex puncto *t* tangentis curvæ *A M* in correspondenti puncto *D* demittatur ordinata *t b* occurrens curvis *A M*, *A' M'*, rectis *D N*, *D' N'*, tangentibus *D t*, *D' t'* in punctis *D*, *D'*, *E*, *E'*, *t*, *t'*, erit *E' t'* spatium debitum fluxioni primæ *Y'* eodem tempore percurrendum atque *D E*, *E t*, quæ sunt spatia debita fluxionibus primis *X*, *Y*. Hinc *E' t'* erit spatium debitum fluxioni secundæ mobilis *Y*. Si igitur ductæ tangentes supponantur pro omnibus punctis *D'* curvæ *A' M'*, & eadem illa fiant, quæ facta sunt in construenda ipsa *A' M'*, nova alia orietur linea, cujus ordinatæ referent rationem spatiorum *d d y*, quæ æqualibus temporibus percurrerentur per solas fluxiones secundas mobilis *Y*.

CXIII.

CXIII.

Quod si ratio spatiorum ddy jugiter difformiter varietur, alia rursus per eamdem constructionem enascetur linea, cujus ordinatæ referant itidem spatia d^3y debita fluxionibus tertiis mobilis *Y*.

Ut autem huiusmodi generatæ curvæ distinguantur inter se, curva proposita AM, cujus ordinatæ sunt y, poterit vocari *Prima*, curva $A'M'$ cujus ordinatæ sunt dy, *Secunda*, curva, cujus ordinatæ sint ddy, *Tertia*, & generatim curva cujus ordinatæ sint $d^{n-1}y$, n^{esima}.

CXIV.

Plures sunt proprietates, quibus mutuo simul connectuntur curva prima, & secunda, secunda & tertia &c. Unam hic attingo pro curva prima & secunda, *fig.*[a] 1.[a] *&* 2.[a], quæque eadem omnino demonstratione extendi potest ad omnia hujusmodi curvarum binaria. En ipsam proprietatem:

Spatium quodcumque BD post quodlibet tempus ab *Y* percursum proportionale est areæ $A'ABD'$ post æquale tempus generatæ.

Spatium enim BD haud aliis certe determina-

nationibus percursum est, quam iis fluxionibus primis, quae singulis motus ipsius momentis habitae sunt. Fluxionibus autem primis pro quolibet puncto proportionalia sunt ea spatia, quae per ipsas aequali tempore percurrerentur. Hinc *B D* proportionale est spatiis iis omnibus simul sumptis, quae solis fluxionibus primis debentur. Sed area *A' A B D'* ex constructione nil aliud est, quam summa, ut ita dicam, omnium hujusmodi spatiorum. Igitur *B D* proportionale est areae *A' A B D'*.

CXV.

Hinc si spatia, quae singulis momentis aequali tempore percurrenda debentur fluxionibus primis duorum mobilium eodem tempore motum inchoantium, sunt aequalia; erunt ipsa spatia de facto percursa inter se aequalia. Cum enim spatia percursa sint futura ut areae, & areae in hoc casu sint futurae aequales, spatia ipsa percursa aequalia esse debent.

CXVI.

Hinc rursus post quodcumque percursum spatium *B D* area *A' A B D'* erit aequalis $D E \times B D$. Referat enim rectangulum $D b = y d x$ spatium

tium alicujus motus, & ponatur $DE = dx$ constans: quæ quidem pro quolibet puncto D patet posse fieri. Expressio $dydx$ spatii debiti fluxioni termini ydx, erit etiam expressio spatii, quod fluxioni debetur assumpti motus. Referat præterea area $A'ABD'$, & ipsa spatium alterius motus: fluxionis hujus motus expressio erit etiam expressio fluxionis areæ. Cum autem hæc generetur ex translatione variabilis BD' super rectam AC, spatium ejus fluxioni debitum patet fore aream genitam ex translatione æquabili rectæ BD', quæ interim invariabilis supponatur. Ut autem æquale tempus assumatur pro spatiis fluxionum utriusque assumpti motus, quoniam spatium DE in primo motu assumptum est constans, si BD' transferatur æquabiliter per $Bb = DE$, referet DE æquale tempus in utraque fluxione. Hinc expressio fluxionis areæ æquali tempore erit $BD' \times Bb = dydx$. Igitur spatium debitum fluxioni primæ assumpti utriusque motus est æquale. Quodcumque autem sit punctum D rursus eodem modo concluditur æqualitas spatiorum, quæ fluxionibus debentur: assumpti præterea motus eodem tempore incipiunt in

A,

A, inde enim aliquam habere incipiunt magnitudinem Db, & $A'ABD'$, ergo ex §. præced. ſpatia ipſa percurſa Db, $A'ABD'$ ſunt æqualia, nimirum DE [illegible] $D = A'ABD'$.

CXVII.

Huic autem demonſtrationi nihil obeſt motus difformis X. Quamvis enim tum dx idem non ſit futurum pro quolibet puncto D, adhuc tamen evincetur æqualitas fluxionum aſſumptorum motuum. Quod ſi æquabilis ſupponatur motus X, adeoque conſtans ſpatium dx, magis perſpicua evadit demonſtratio. Cum autem hæc ſuppoſitio interdum fieri non poſſit per §. XCVIII., ſi tamen fiat, & deinde, quando alicubi occurrit $dx = 0$, alius motus uniformis, & priori æqualis juxta eamdem, vel contrariam, prout opus erit, directionem ſubſtituatur in X, nihil in calculum redundat, quod ipſum turbet. Quæ enim incommoda ſequerentur ex falſa illa ſuppoſitione compenſantur per invectam novi motus æquabilis ſubſtitutionem.

CXVIII.

Sint, in *fig.* 1.ª & 2.ª, ordinatæ poſitivæ, nempe jacentes ex §. CXV. ſupra AC, & Et pro-

producta occurrat curvæ AM in D, curvæ $A'M'$ in D', axi in b; assumaturque juxta §. præced. constans $DE = dx$, ex §. CXVI. habetur $DE \times bd' = A'Abd'$, unde subtrahendo $DE \times BD = A'ABD'$, superest $DE \times Ed = D'Bbd'$. Est autem in figura 1.ª $ED = Et - Dt$, in 2.ª $ED = Et + Dt$, in utraque $D'Bbd' = D'B \times Bb + D'E'd' = Et \times D'E + D'E'd'$, erit igitur in 1.ª $- DE \times Dt = D'E'd'$, in 2.ª $DE \times Dt = D'E'd'$.

CXIX.

Cum debeat ex dictis in utraque fig.ª esse vel

$$D'E'd' = \frac{D'E' \times E't'}{2} + t'D'd', \text{ vel}$$

$$D'E'd' = \frac{D'E' \times E't'}{2} - t'D'd'.$$

Erit rursus in prima

$$- DE \times Dt = \frac{D'E' \times E't'}{2} \pm t'D'd',$$

$$\text{sive } dt = - \frac{ddy}{2} \mp \frac{t'D'd'}{dx};$$

In 2.ª vero $DE \times Dt = \dfrac{D'E' \times E't'}{2} \pm t'D'd'$,

$$\text{sive } dt = + \frac{ddy}{2} \mp \frac{t'D'd'}{dx}.$$

CXX.

CXX.

Ex tangentis porro diversa positione diversas sortitur curva denominationes. Relate enim e. c. ad axem AC dicitur *Concava* in D, cum tangens, ut in *fig.*ᵃ 1.ᵃ, hinc inde a contactu in D cadit ultra curvam AM, *Convexa* ibidem, cum tangens, *fig.*ᵃ 2.ᵃ utrimque a contactu cadit inter curvam, & axem.

CXXI.

Hinc curva utrimque a puncto contactus ngentis convexa est relate ad tangentem sam Tt productam: quod quidem hic proerea monendum censui, cum usui sit furum saepius.

CXXII.

Hinc 2.°, si ordinatae sint positivae, & ddy ficiatur signo negativo, curva erit concava, in *fig.*ᵃ 1.ᵃ, si vero ddy afficiatur signo sitivo, erit convexa, ex §. CXIX.

CXXIII.

Suppositis autem ordinatis positivis, prout otus Y erit acceleratus, vel retardatus poito constanti dx, & prout directio ipsius fuerit vel ex A versus a, vel in contrariam directionem, curva erit aut concava, aut convexa, & quattuor erunt casus, ex quorum

producta occurrat curvæ AM in D, curvæ $A'M'$ in D', axi in b; assumaturque juxta §. præced. constans $DE = dx$, ex §. CXVI. habetur $DE \times bd = A'Abd'$, unde subtrahendo $DE \times BD = A'ABD'$, superest $DE \times Ed = D'Bbd'$. Est autem in figura 1.ª $ED = Et - Dt$, in 2.ª $ED = Et + Dt$, in utraque $D'Bbd' = D'B \times Bb + D'E'd' = Et \times D'E + D'E'd'$, erit igitur in 1.ª $- DE \times Dt = D'E'd'$, in 2.ª $DE \times Dt = D'E'd'$.

CXIX.

Cum debeat ex dictis in utraque fig.ª esse vel

$$D'E'd' = \frac{D'E' \times E't'}{2} + t'D'd', \text{ vel}$$

$$D'E'd' = \frac{D'E' \times E't'}{2} - t'D'd'.$$

Erit rursus in prima

$$- DE \times Dt = \frac{D'E' \times E't'}{2} \pm t'D'd',$$

sive $dt = - \frac{ddy}{2} \mp \frac{t'D'd'}{dx}$;

In 2.ª vero $DE \times Dt = \dfrac{D'E' \times E't'}{2} \pm t'D'd'$,

sive $dt = + \frac{ddy}{2} \mp \frac{t'D'd'}{dx}$.

CXX.

CXX.

Ex tangentis porro diversa positione diversas sortitur curva denominationes. Relate enim e. c. ad axem *AC* dicitur *Concava* in *D*, cum tangens, ut in *fig.*ª 1.ª, hinc inde a contactu in *D* cadit ultra curvam *AM*, *Convexa* ibidem, cum tangens, *fig.*ª 2.ª utrimque a contactu cadit inter curvam, & axem.

CXXI.

Hinc curva utrimque a puncto contactus tangentis convexa est relate ad tangentem ipsam *Tt* productam; quod quidem hic propterea monendum censui, cum usui sit futurum sæpius.

CXXII.

Hinc 2.° , si ordinatæ sint positivæ, & ddy afficiatur signo negativo, curva erit concava, ut in *fig.*ª 1.ª, si vero ddy afficiatur signo positivo, erit convexa, ex §. CXIX.

CXXIII.

Suppositis autem ordinatis positivis, prout motus *Y* erit acceleratus, vel retardatus posito constanti dx, & prout directio ipsius fuerit vel ex *A* versus *a*, vel in contrariam directionem, curva erit aut concava, aut convexa, & quattuor erunt casus, ex quorum

primis duobus eruitur concavitas, ex reliquis convexitas: Casus sunt

1.us Incrementum ordinatarum, motus retardatus:

2.us Decrementum ordinatarum, motus acceleratus:

3.us Incrementum ordinatarum, motus acceleratus,

4.us Decrementum ordinatarum, motus retardatus.

Crescunt vero jugiter ordinatæ, si directio Y fuerit ex A versus a, decrescunt vero perpetuo, & perpetuo minores fiunt, si directio Y fuerit ex a versus A. Horum omnium facilis est demonstratio.

CXXIV.

Evidens enim est directionem vis perpetuo agentis, ex qua pendet motus retardatus, vel acceleratus ipsius Y, esse debere in primis duabus ex a versus A, adeoque cum ex §. XLVII. ea exprimatur per ddy, erit $-ddy$, & curva erit concava ex §. CXXII. In posterioribus autem duabus directio vis nequit non esse ex A versus a, & propterea $+ddy$, & curva convexa.

CXXV.

CXXV.

His ita conſtitutis progrediendum jam ad Cuſpides eſt, Flexus contrarios, & ordinatas maximas aut minimas. Sint in *fig.is* 5.*a* & 6.*a* rectæ *AC*, *Aa*, *Tt*, *BD*, eædem atque in 1.*a* & 2.*a*, & producatur *BD* in *b* ultra *D*. Suppoſitis poſitivis ordinatis, pervenerit *Y* in *D* per angulum *BDT*, vel *TDb*, poterit idem *Y* diſcedere ex *D* 1.° vel per angulum *TDb*, vel *BDT*, 2.° per eumdem angulum, 3.° per angulum *BDt*, vel *tDb*: 4.° per angulum *tDb*, vel *BDt*. Singuli caſus hic loci ſunt percurrendi.

CXXVI.

Pervenerit *Y* in *D* per angulum *BDT* regrediatur vero per angulum *TDb*, quod quidem idem eſt, ac ſi perveniſſet *Y* in *D* per angulum *TDb*, recedat vero per *BDT*. In hoc caſu quicumque ſit angulus *BDT*, ne tangens *Tt* cadat ex parte concavitatis contra id, quod monui §. CXXI., arcus geniti erunt convexi ad *Tt*, & ſibi invicem, exiſtente concavo ad axem arcu *OD* in angulo *BDT*, convexo arcu *DN* in angulo *TDb*, & curva *cuſpidem primi generis* habere dicitur in *D*, *fig.a* 5.*a*.

 CXXVII.

CXXVII.

Pervenerit 2.° *Y* in *D* per *BDT*, & recedat per eumdem angulum, & arcus geniti sint *OD*, *DP*. Erunt hujusmodi arcus concavi ad axem *AC*, ex citato superius §., & curva dicitur habere in *D cuspidem secundi generis*. Quod si pervenisset *Y* in *D*, & ex *D* recessisset per eumdem angulum *TDb*, arcus geniti *ND*, *DM* erunt ad axem convexi, & curva idem *cuspidis* genus dicitur habere in *D*, *fig.^a 5.^a*.

CXXVIII.

Illud autem commune est utriusque generis cuspidibus, quod recta, quæ curvam tangit in *D* ubi habetur cuspis, unica quidem est, sed, quatenus est tangens, duplicem habet directionem. Considerando enim curvam *ODN*, in cujus puncto *D* habetur cuspis primi generis, punctum *D* tam pertinet ad arcum *OD* genitum in accessu *Y* ad *D*, quam ad arcum *DN* genitum in recessu ejusdem *Y* ex *D*. Jam vero patet directionem tangentis arcus *OD* aliam esse non posse quam ex *D* versus *t* in puncto *D*, directionem vero tangentis arcus *DN* in eodem puncto *D* aliam esse nequire, quam ex *D* ver-

versus T. Quod si idem dicatur de reliquis cuspidum casibus superius commemoratis, evidens est id cuspidibus omnibus esse commune.

CXXIX.

Ex hac vero cuspidum proprietate eruitur 1.° methodus, cujus ope facile pateat, utrum datum curvæ punctum pertineat ad cuspidem necne. Ex præcedenti enim cum duplicem habere directionem debeat tangens, unus, idemque valor ejusdem $\frac{dy}{dx}$ duplici afficietur signo, negativo videlicet, & positivo. Ex inferius autem dicendis hujusmodi duplex signum pro eodem tangentis valore solarum cuspidum proprium est.

Quod si sit $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{r}{o}$, vel $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{o}{s}$, ubi r, s sunt functiones y, x, erit præterea tangens axi perpendicularis, vel parallela ex §. XCVII., XCIX.

CXXX.

Eruitur 2.° methodus cognoscendi, utrum proposita curva cuspidis ullius gaudeat proprietate. Cum enim duplex illud signum obtineri nequeat nisi extractione radicum

 pa-

parium; si in æquatione, quæ rationem refert spatiorum dy, dx, eadem spatia non ascendant ad potentiam parem, nulla habebitur cuspis. dy vero, & dx ad potestatem ullam elevari nequeunt, nisi casus ille recurrat, quem commemorari §. C., & operationes eæ instituantur, quæ §. CIV., CV. præscriptæ sunt: ad potestatem autem parem attolli non possunt, nisi semel, aut ter, aut generatim impari vicium numero occurrat casus idem $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. Igitur ut rite quis statuere possit, utrum data curva ullam habeat cuspidem, videndum primo erit, utrum repugnet suppositio $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, deinde utrum hæc eadem suppositio impari vicium numero repeti queat.

CXXXI.

Facile porro est dignoscere utrum supponi possit $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. Sit enim æquatio $H = o$, & $I\,dy + L\,dx = o$. Si $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ erit $I = o = L$. Ex I ex. c. eruatur valor y, quo substituto in L eruetur valor verus x, quo rursus substi-

ſtituto in *I*; ſi primus valor *y* continebat *x*, alius valor *y* habebitur, qui notus erit. Subſtitutis demum valoribus notis pro *y*, *x* in *H*, ſi *H* adhuc perſeverat eſſe $=$ o, ſignum eſt valores ſubſtitutos eſſe poſſe ejus radices, & ſupponi proinde $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Ut vero pateat; utrum repeti hæc ſuppoſitio poſſit, iidem valores ſubſtituantur in *Q*, *R* §. CIII.. Si tam *Q*, quam *R* fiant $=$ o, repeti certo poterit ſuppoſitio.

CXXXII.

Hinc cum repugnet ſupponere $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ in curvis primi generis, nulla in iis cuſpis haberi poteſt, & propterea ad curvas inveniendas cuſpidis proprietate gaudentes ad altiora curvarum genera erit recurrendum.

CXXXIII.

Pervenerit 3.° *Y* in *D* per angulum *BDT*, & ex *D* recedat per angulum *tDb* ad verticem oppoſitum, arcus vero genitus in acceſſu, *fig.*^a *6.*^a, ſit *ND*, arcus genitus in receſſu ſit *DO*. Quoniam tangens *Tt* cadit ex parte convexitatis, arcus *ND* r. ate ad axem erit concavus, *DO* convexus, & cu. a

in D ex concava fit convexa, *Flexumque contrarium* dicitur habere.

Quod si Y pervenisset in D per angulum TDb, & ex D reggrediatur per angulum BDt ad verticem oppositum, adhuc *Flexus contrarius* haberetur, sed curva ex convexa fieret concava, existente MD convexo, DP concavo.

CXXXIV.

Quicumque autem sit flexus, ibi, ubi habetur flexus ipse, nequit non esse $ddy = o$. Sit enim NDO curva genita, erit ex §. CXXII. $- ddy$ per arcum ND, $+ ddy$ per arcum DO, adeoque desinet in D spatium ddy esse negativum, atque incipiet esse positivum, simulque potentia mutabit directionem. Hinc in D aut $ddy = \infty$, aut $ddy = o$. Cum vero repugnet energia infinita potentiæ tempore finito, in hoc casu repugnabit etiam $ddy = \infty$, & proinde erit $ddy = o$.

CXXXV.

Pervenerit demum Y in D per angulum BDT, atque inde recedat per BDt, sitque NDP curva genita, erit utrimque circa D curva concava ad axem ex §. CXXI., *fig.*[a] *6.*[a]. Quod si pervenerit in D per angulum TDb gene-

generans arcum MD, & recedendo per tDb generet arcum DO, erit uterque genitus arcus convexus ad axem AC.

In utroque autem casu curva perseverabit esse concava, vel convexa.

CXXXVI.

At si angulus BDT fuerit rectus, tum 1.° ex §. XCIX. tangens axi parallela, & propterea $dy = 0$.

2.° In primo casu, quando scilicet curva generata est NDP, ordinata BD erit maxima. Crescunt enim jugiter ordinatæ per arcum ND, decrescunt vero per arcum DP. In secundo casu erit BD minima, tum enim per arcum MD decrescunt perpetuo ordinatæ, & crescunt per DO.

3.° In utroque casu ddy affici perseverat eodem signo, negativo nimirum, quando BD est maxima, positivo quando est minima.

CXXXVII.

In his autem postremis duobus casibus in *fig.ª 6.ª*, vel habeatur flexus, vel non, unica est directio tangentis Tt, ex D nimirum versus t. Hinc duplex illud signum ejusdem valoris tangentis, de quo §. CXXVIII., CXXIX. solis cuspidibus proprium est.

CXXXVIII.

CXXXVIII.

Ex hac cuspidum proprietate, & ex spatio ddy, quod in flexibus contrariis æquatur nihilo, oritur discrimen maximorum, & minimorum. Sit enim $dy = o$, $ddy = p$, vel $= -p$, & sit p quantitas realis continens utramque, vel alteram tantum ex incognitis y, x, vel solas constantes, erit y respondens illi puncto ubi $dy = o$, vel *maximum*, vel *minimum*.

Advenerit enim Y in D per BDT, *fig.ª 6.ª*, recedendo ex D, non reggreditur per eumdem angulum, vel per TDb, secus haberetur cuspis, & duplex illud signum pro uno eodemque valore: neque præterea reggreditur per angulum ad verticem oppositum, secus esset $ddy = o$. Igitur Y discedit ex D per BDt, & cum sit $dy = o$, nempe tangens parallela axi, erit BD maxima.

Eodem modo evincitur Y recedere debere in hoc casu per tD, si accessit per TDb, adeoque esse BD minimam.

Utrum autem accedat Y ad D per BDT, vel per TDb indicabit signum vel positivum, vel negativum præfixum ipsi ddy, juxta §. CXXXVI.

CXXXIX.

CXXXIX.

Cum autem ea, quæ de curva prima & secunda dicuntur, de quolibet alio curvarum inferiorum binario dici possint, juxta §. CXIV., & præcedentes, generatim etiam concludetur ordinatam $d^{n-1}y$ curvæ n^{esima} fore vel maximam vel minimam, si $d^{n}y = 0$, $d^{n+1}y = p$, vel $-p$.

CXL.

In flexu contrario, in eadem *fig.*^a *6.*^a, si curva genita sit concavo convexa, ut *NDO*, cum ordinatæ perseverent crescere ante, & post flexum in *D*, motus ex retardato fiet acceleratus juxta §. CXXIII., adeoque dy in *D* erit minima. Si vero curva sit convexo-concava, ut *MDP*, motus ex accelerato fiet retardatus, ex eodem illo paragrapho, & propterea erit dy maxima.

CXLI.

E converso si dy ex §. CXXXIX. evincitur maxima vel minima, ordinata correspondens y pertinebit ad punctum Flexus contrarii. Sit enim dy maxima ergo dy, fluxio videlicet prima *Y*, crescit, deinde minuitur, & proinde motus ex accelerato fit retardatus.

Cum

Cum autem dy crescit, ddy affici debet signo positivo, debet enim directio vis conspirare cum directione dy: at quando dy minuitur, affici debet ddy signo negativo, quia directio vis esse debet contraria.

Cum igitur motus est acceleratus, Y describit arcum convexum, quando est retardatus concavum ex §. CXXII. Hinc ex §. CXXXIII. perseverant ordinatæ y decrescere, & propterea curva genita erit MDP *fig.ª 6.ª* habens flexum in D.

Si autem dy esset minima, eodem ratiocinio evincitur describi NDO concavo convexam.

CXLII.

Hinc generatim si $d^{n+1}y$ ordinata curvæ n^{esima} probetur esse vel maxima vel minima ordinata, curva $\overline{n-1}^{esima}$, cujus ordinata $d^n y$, habebit flexum in eo puncto, cui respondet $d^{n+1}y$.

CXLIII.

Quod si curva secunda, vel alia quævis n^{esima} habeat flexum contrarium, vel quomodocumque secet axem, curva prima, vel alia quævis $\overline{n-1}^{esima}$ habebit maximam, vel minimam ordinatam.

Sit

Sit enim curva secunda *N'B P'*, *fig.*[a] *6.*[a], quæ habeat flexum contrarium in *B*, vel in *B* secet utcumque axem *AC*. Per arcum *N'B* dy ejus ordinata perpetuo decrescit donec evanescat in *B*, deinde reviviscit post *B*, & crescit mutata directione. Igitur 1.° motus *Y* ex retardato fit acceleratus: 2.° eadem perseverat esse directio vis per quam motus retardabatur, & deinde accelerabatur, proptereaque perseverat ddy eodem affici signo, & curva esse vel concava, vel convexa. Ergo ex §. CXXIII. ordinatæ y crescunt vel decrescunt usque in *B*, deinde decrescunt, vel crescunt, & proinde ordinata y respondens puncto *B* vel maxima, vel minima.

Quod si hoc extendatur ad quodcumque inferiorum curvarum binarium patebit, curvam $\overline{n-1}^{esimam}$ habituram maximam vel minimam ordinatam si curva n^{esima} habeat flexum contrarium, vel axem secet utlibet in *B*.

CXLIV.

Hisce positis facile est determinare, quomodo se se habeat data curva in dato puncto. Sit vel $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{s}$, ubi r, s sint utcum-

CXLVII.

Sit 2.° $\frac{dy}{dx}=\frac{o}{s}$, erit tangens abſciſſis parallela, cumque deſit cuſpidis indicium, habebitur vel flexus, vel maxima, vel minima ordinata. Conſulendus autem rurſus eſt valor ddy ad determinandum vel flexum, vel maximam, aut minimam. Si $ddy=-p$, vel $=+p$, erit maxima, vel minima ordinata reſpondens y, juxta §. CXXXVIII. Si $ddy=o$, $d^3y=o$....., & demum $d^n y$ $=p$, vel $-p$, tum, ex §. CXLII., CXLIII., curva $\overline{n-2}^{esima}$ habebit flexum, $\overline{n-3}^{esima}$ maximam, vel minimam ordinatam, $\overline{n-4}^{esima}$ flexum, $\overline{n-5}^{esima}$ maximam, vel minimam, atque hoc pacto alternando, ſi n fuerit numerus par, curva prima habebit maximam, vel minimam ordinatam y, ſi n fuerit impar, curva prima habebit flexum.

CXLVIII.

Sit 3.° $\frac{dy}{dx}=\frac{r}{o}$. In hoc caſu recurrent omnia ea, quæ §. præced. dicta ſunt, ſi ratio ipſa invertatur, & fiat $\frac{dx}{dy}=\frac{o}{r}$. In fig.a

autem prima, & secunda, & reliquis, pro linea abscissarum erit assumenda Aa, in qua movetur Y, & simul cum Y transferenda AC, in qua movetur X, quod proinde curvam generabit, cujus tangens adhuc erit abscissis parallela. Hinc erit dy assumendum constans, & de spatio dx ea rursus recurrent, quæ de dy dicta §. CXXIII. Atque hoc pacto, si rursus ratio invertatur, & redeat prior $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{o}$, invenientur abscissæ maximæ, & minimæ, & regressus curvarum. Idem etiam peragendum erit, quotiescumque in cuspidibus occurrat $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm r}{o}$.

CXLIX.

Cum in cuspidibus primi generis habeatur flexus contrarius in D, *fig.*[a] *5.*[a], ex iis quæ supra de flexibus dicta sunt, erui methodus posset, cujus ope cuspides primi generis a cuspidibus ceteris distinguerentur. Sed cum admodum implexa illa futura sit, en aliam multo faciliorem. Habeatur igitur cuspis in D, & innotuerint ordinata BD, subtangens BT.

Assumatur alia, quævis abscissa AE minor

 quam

quam AB, & ex E elevetur ordinata Em occurrens in m, n, t', o, p arcubus MD, ND, OD, PD, & tangenti Tt. Ex similitudine triangulorum BTD, ETt eruetur valor Et', qui ponatur esse a. Substituatur deinde in æquatione curvæ loco abscissæ x valor abscissæ AE, & bini prodibunt cogniti valores pro duplici ordinata. Si horum alter major sit quam a, alter minor, tum curva cuspidem habebit primi generis; si uterque sit minor, erit secundi generis, & jacebit cuspis in angulo BDT, & proinde curva erit concava, si uterque sit major, erit pariter cuspis secundi generis, & jacebit in angulo TDt, & curva erit convexa.

CL.

Quod si angulus BDT sit rectus, cum in eo casu sit $Et' = BD$, inventi bini valores ordinatæ comparandi erunt cum $BD = a$, atque eodem ratiocinio concludetur cuspis vel primi, vel secundi generis. Si vero fuerit $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm r}{0}$, ea operatio instituenda erit, quam notavimus §. CXLVIII.

CLI.

Superest nunc 4.us casus, cum $ddy = 0$,

$d^3y=0 \ldots\ldots d^ny=0$, quin umquam obtineatur valor ullus realis pro d^ny, aut pro dx^n. In hoc casu, methodus nuper tradita quale sit datum punctum *D* docebit. Assumenda autem erit (*fig.*ª *6.*ª) duplex abscissa, *AE'* minor quam *AB*, & *AE* major quam *AB*, tum eodem modo invenienda valores pro *Et'*, *E'T'*. Substitutis deinde separatim his abscissæ valoribus in æquatione, eruetur valor ordinatarum: tum comparando valores:

Si *E'n* minor quam *E'T'*, & minor pariter *Ep* quam *Et'*, curva erit concava, & *BD* erit maxima, *BDT* est angulus rectus.

Si *Em* major quam *E'T'*, & major pariter *Eo* quam *Et'*, curva erit convexa, & *BD* minima, si angulus est rectus.

Si *E'n* minor quam *E'T'*, sed *Eo* major quam *Et'*, curva erit concavo-convexa.

Si demum *E'm* major quam *E'T'*, sed *Ep* minor quam *Et'*, curva erit convexo-concava.

In his autem *E'n*, *E'm*, *Eo*, *Ep* sunt ordinatæ, quarum valores eruti ex æquatione sunt per substitutionem abscissarum *AE'*, *AE*.

Hæc autem circa præcipuas curvarum affectiones disputasse sufficiat. Nunc de circulis, quos vocant *Osculatores*, agendum.

CLII.

Sit curva *MDN*, *fig.*ª 7.ª, quam generet mobile *Y*. Deferat secum *Y* rectam indefinitam *Mm*, quæ in singulis curvæ punctis curvam generatam tangat, eamque propterea habeat directionem, quam mobile in iis mutat, juxta §. XX., & XXI.
Pervenerit *Y* ex *M* in *M'*; ibique recta delata simul cum *Y* habeat positionem *M' m'*. Si hujusmodi rectæ positio, & directio eadem esset in *M'*, eademque fuisset toto eo tempore, quo *Y* generavit *MM'*, ac fuit in *M*, linea descripta foret recta: quia vero curva supponitur generari ab *Y*, alia idcirco, atque alia pro locorum diversitate erit diversitas positionum, & propterea *Mm* rotatur circa *Y*. Per *M'* ducatur *M' m''* parallela *Mm* tangenti in *M*, angulus *m'' M' m'* duo indicabit, 1.° diversitatem positionis rectæ delatæ in *M*, & *M'*, 2.° positiones omnes, atque directiones, quas *Y* mutavit generans *MM'*. Hinc 1.° si tota curva in partes dividatur, quarum singulæ æquentur arcui *MM'*,

atque

atque in singulis divisionum punctis fiat angulus $m''M'm'$, ut ante, quo major est angulus ille, tanto magis abfuit Y a generanda linea recta: 2.° cum curvæ a recta discrimen per §. XX. sit hæc ipsa deviatio a recta generanda, major erit curvatur a dicenda, si angulus idem ille major fuerit; minor vero, si fuerit minor.

CLIII.

Certa porro erit in quolibet datæ curvæ puncto determinatio tangentis ad hujusmodi rotationem, quia certa simul est curva generanda. In flexu autem contrario nulla erit curvatura. Cum enim tangens semper cadat ex parte convexitatis, & in flexu eam plagam versus incipiat curva convexitam obvertere, cui prius concava erat; rotatio tangentis mutabitur, adeoque & nulla erit in flexu ad rotandum tangentis determinatio, & nulla propterea curvatura.

CLIV.

Hæc autem tangentis ad rotationem determinatio potest eadem esse in singulis curvæ punctis, vel jugiter alia. In primo casu patet post æquales arcus descriptos eumdem fore angulum, & curvam esse circulum, in

secundo alium, atque alium angulum, & pro anguli varietate fore diversam curvam.

CLV.

At si plures circuli radios inæquales habentes in arcus dividantur, quorum longitudo in omnibus eadem sit, angulus rotationis in iis major erit, qui minoribus radiis descripti sunt, in iis minor, qui longiores habent radios: in primis major erit curvatura, in his minor, constans tamen in singulis.

CLVI.

Quoniam vero in reliquis curvis pro curvarum varietate variatur determinatio; ut ratio innotescat, qua invicem comparari diversæ possint curvaturæ, eodem modo inducuntur circuli, quo motus æquabilis assumitur ad reliquorum motuum dimetiendam difformitatem, & circulus in quolibet curvæ puncto ejus *osculator* ille dicitur, quem Y describeret, si, quam habet ibi tangens ad rotandum determinationem, ea constans perseveraret.

CLVII.

Sit igitur, in *fig.* 49., 8., circulus osculator curvæ *MDN* in puncto *D*. [illegible]

1.° Eamdem habebit tangentem circulus osculator, quam ibidem habet curva; In eo enim puncto, & determinatio tangentis ad rotandum, & ejus positio eadem est.

2.° Prope punctum D utrimque ita circulus, & curva convexitatem obvertunt tangenti, ut tangens nequeat jacere inter circulum, & curvam.

3.° Congruit cum curva in unico puncto, vel simplex illud sit, vel multiplex. Nam si post quodcumque æquale tempus descripti supponantur arcus Dd curvæ, & arcus Dd' circuli osculatoris, angulus rotationis in curva in fine arcus Dd' vel minor est, vel major angulo rotationis in circulo post arcum Dd'. Si minor est, minus pariter in percurrendo arcu Dd recessit Y a directione DT, quam habebat in D, quam recesserit idem Y percurrens circulum osculatorem. Hinc punctum d jacebit inter circulum, & rectam DT, ut in *fig.ª 7.ª*

Si major, punctum circuli d' jacebit inter curvam & DT, ut in *fig.ª 8.ª*. Idem etiam concludetur si puncta d, d' assumantur ex altera parte puncti D. Est autem & punctum d punctum quodcumque curvæ præter D, &

punctum *d'* punctum quodcumque circuli præter *D*, igitur quæcumque sint puncta *d*, *d'*, dummodo non sint punctum *D*, numquam coincident, & proinde circulus cum curva non coincidit, nisi in unico puncto *D*. Hinc si ex utraque parte puncti *D* angulus rotationis in curva minor est, quam in circulo, curva cadet inter tangentem & circulum, si ex utraque parte major est, inter curvam & tangentem cadet circulus: si vero ex una parte major sit, ex altera minor, tum circulus ex una parte cadet inter tangentem, & curvam, ex altera vero inter circulum, & tangentem cadet curva.

CLVIII.

Ex his fluit, quemcumque alium circulum, qui eamdem cum osculatore, & curva habeat tangentem in *D*, hinc inde a contactu in *D* inter circulum osculatorem & curvam cadere nullo modo posse. Nam alius quicumque circulus major erit osculatore, vel minor. Si minor sit, in *fig.*[a] 7.[a], cadet totus intra circulum osculatorem, quod quidem patet, in *fig.*[a] vero 8.[a] determinatio tangentis ad rotandum major erit in puncto *D* hujus circuli per §. CLV., quam in osculatore,

tore, & curva, ergo adhuc esse major perseverabit utrimque a puncto *D* per aliquem arcum finitum. Æqualis enim, & proinde etiam minor nequit unico fieri momento, quo unico in loco esse potest mobile curvam generans. Utrimque igitur a puncto *D* cadet intra curvam.

Si vero sit major, evidens est in *fig.*ª 8.ª cadere illum debere inter osculatorem, & tangentem, in *fig.*ª vero 7.ª, ejus tangentis ad rotandum determinatio in *D* minor erit, quam in osculatore, & curva, & proinde utrimque a puncto *D* minor esse perseverabit per aliquem finitum arcum, adeoque utrimque cadet ultra circulum osculatorem & curvam. Hæc autem circuli osculatoris proprietas ita illius propria est, ut in ejus definitionem a plerisque assumatur, & methodum aperiat ostendendi utrum propositus circulus curvam in dato puncto osculetur, nec ne.

CLIX.

Sit in *fig.*ª 9.ª, *&* 10.ª Parabola *Dd*, quam tangat in *D* recta *DT*. Sit *DR* directio diametri respondentis puncto *D*, hujusque diametri parameter sit ipsa *DR*. Si super chordam *DR* describatur circulus, cujus tangens

in

in D sit eadem DT, is parabolam osculabitur in D.

Ducatur ex puncto R recta RK parallela tangenti DT, tum ex puncto quolibet T tangentis recta TP occurrens parabolæ in d, circulo prædictis conditionibus descripto in p, P. Ex parabolæ proprietate habebitur $\overline{TD}^2 = Td \times TK$; cum sit $TK = DR$. Ex proprietate circuli $\overline{TD}^2 = Tp \times TP$. Hinc $Td \times TK = Tp \times TP$, sive $TK : TP : Tp : Td$.

CLX.

Hoc posito, RK vel ab ipso puncto R cadit intra circulum descriptum, vel extra. Cadat 1.° extra circulum, ut in fig.ª 9.ª, igitur $TK > TP$, & propterea ex analogia paragraphi præcedentis etiam $Tp > Td$. Hinc quia punctum T est quodcumque, circulus ille statim a contactu cadit intra parabolam, & circulus alius quicumque minor multo magis cadet infra tangentem, & curvam, cum totus ille cadat intra descriptum circulum super chorda DR.

Sit porro quilibet alius circulus major, cujus chorda $DR' > DR$, & tangens in D

ca-

eadem DT. Igitur RK aliqua sui parte cadet intra circulum hunc majorem. Secet hunc TK in q, $\mathfrak{Q}$, erit $\overline{TD}^2 = Tq \times T\mathfrak{Q} = Td \times TK$, hinc $TK : T\mathfrak{Q} :: Tq : Td$. Sed $TK < T\mathfrak{Q}$, ergo etiam $Tq < Td$, ergo, cum punctum D sit quodcumque, punctum q cadit ultra circulum prius descriptum, & parabolam.

CLXI.

Cadat 2.° RK intra circulum, ut in *fig.*ª 10.ª, ergo $TK < TP$, adeoque ex superiori analogia etiam $Tp < Td$. Hinc circulus quicumque alius, qui major sit jam descripto, cadet ultra circulum priorem & parabolam, cum & ipse circulus descriptus cadat ultra parabolam.

Sit autem quilibet alius circulus minor descriptus super chorda $DR' < DR$, & ejus tangens in D sit pariter eadem DT. Secet hunc TK in q, $\mathfrak{Q}$, erit ut ante $TK : T\mathfrak{Q} :: Tq : Td$, & cum alicubi prope D sit $TK > T\mathfrak{Q}$, erit etiam $Tq > Td$, adeoque punctum q novi circuli statim a contactu infra circulum, & parabolam.

Idem si dicatur etiam de altera parte circa punctum D, nullus habebitur casus, in

quo

quo circulus alius describi possit, qui intra descriptum circulum cadat, & parabolam. Unde infertur propositum circulum parabolam osculari in *D*.

CLXII.

Sint binæ parabolæ *ND*, *OD* transeuntes (*fig.*^a 11.^a) per unum idemque punctum *D*, in quo *DT* sit communis earum tangens, *DK* communis diameter.

Sit *DS* parameter diametri *DK* parabolæ *ND*, *DR* parameter ejusdem diametri pro *OD*, & super chordas *DS*, *DR* bini circuli describantur *DPS*, *DQR*, quorum tangens in *D* sit communis, & eadem *DT*:

1.° Ex dictis superius *DPS* osculabitur parabolam *ND* in puncto *D*, *DQR* parabolam *OD* in eadem puncto.

2.° Cum inter circulum osculatorem, & curvam, quam is osculatur, cadere circulus ullus alius nequeat, ex §. CLVIII., circulus *DPS* cadere non potest prope *D* inter parabolam *OD*, & ejus osculatorem *DPR*, multoque minus *DPR* inter *ND*, & *DPS*.

Hæc autem duo rite procedunt, etiamsi circuli osculatores caderent inter tangentem, & curvam, quam osculantur, aliter nempe,

ac

ac habeatur in figura. Quod quidem etiam notandum est in sequentibus §§.

CLXIII.

Quod si iisdem positis circulus DQR osculetur præterea in D curvam aliam quamcumque MD, nulla alia poterit duci parabola, quæ prope D cadat inter parabolam OD, & curvam MD.

Cadat enim, si fieri potest, inter MD, & OD alia parabola ND, sitque DPS ejus circulus osculator in D, & propterea sit DK diameter, & hujus parameter sit DS. Cum ex præced. DPS cadere nequeat inter OD, & DQR, cadet propterea inter curvam MD, & ejus osculatorem DQR, quod fieri nequit ex citato superius §. CLVIII.

CLXIV.

Si igitur datâ curvâ MD habeatur methodus ducendi parabolam OD, quam osculatricem licet vocare, quæque ita transeat per D, ut inter curvam & ipsam parabolam nulla alia posit duci, ducta quacumque DK ex puncto D tamquam diametro, inventaque ejus parametro DR, circulus descriptus chorda DR, tangente DT, curvam osculabitur in D.

CLXV.

CLXV.

Jam vero in promptu methodus est, duce Mac-Laurino, ad hujusmodi parabolam determinandam.

Sit enim, fig. 12.a, punctum D in curva MD, cujus axis AC, ordinata ad idem punctum D, BD, DT tangens.

Sit $M'D'$ ejus curva secunda, quam $D'T'$ tangat in D'. Ducatur alia quævis ordinata bd, occurrens curvæ primæ & secundæ in d, d', tangentibus in T, T', quæque ita distare supponatur a BD, ut arcus Dd interceptus inter puncta D, d sit quilibet arcus finitus. Ex punctis D, D' ducantur rectæ DE, $D'E'$ parallelæ axi, quas in E', E secet bd. Denique in ordinata BD ex D versus B, si curva in D est concava ad AC, secus ex D in plagam oppositam, assumatur recta $DQ = \frac{\overline{TD}^2}{2E'T'}$, & diametro BD, parametro DQ, tangente DT, ducatur parabola OD secans in m ordinatam bd.

Erit 1.º $D'E'T' = Tm \times DE$. Nam cum ex proprietate parabolæ sit $Tm \times DQ = \overline{TD}^2$, & triangulum $D'E'T'$ sit æquale rectangulo

E'T'

$\frac{E'T' \times D'E'}{2} = \frac{E'T' \times DE}{2}$, erit $E'T'$

$= \frac{2 D'E'T'}{DE}$, & propterea

$$DQ = \frac{\overline{TD}^2}{2E'T'} = \overline{TD}^2 \times \frac{DE}{D'E'T'}.$$

Hoc autem valore pro DQ substituto in $Tm \times DQ = \overline{TD}^2$, habetur $Tm \times \overline{TD}^2 \times \frac{DE}{D'E'T'} = \overline{TD}^2$, & demum $Tm \times DE = D'E'T'$, unde etiam eruitur $Tm = \frac{E'T'}{2}$.

CLXVI.

2.° Sit alia quævis parabola ND secans in puncto n ordinatam bd, & transiens per D, in quo habeat eamdem diametrum, & tangentem, ac OD, parameter vero sit p. Assumatur ex E' versus B $E'n' = \frac{\overline{TD}^2}{2p}$, & ducatur $n'D'$. Erit $\frac{E'n' \times DE}{2} = D'E'n'$, sive $E'n' = \frac{2 D'E'n'}{DE}$. Comparando diversos habitos valores $E'n'$, erit $\frac{\overline{TD}^2}{p} = \frac{D'E'n'}{DE}$, sive

five $p = \frac{\overline{TD}^2}{D'E'n'} \times DE$.

Eſt autem ex proprietate parabole $Tn \times p = \overline{TD}^2$, unde, ſubſtituto valore p, habetur

$Tn \times \frac{\overline{TD}^2}{D'E'n'} \times DE = \overline{TD}^2$, five

$Tn \times DE = D'E'n'$.

CLXVII.

3.° Hæc parabola ND cadere non poteſt inter curvam MD, & parabolam OD.

Sit enim $M'D'$ concava ad axem, ut in *fig.ª 12.ª*, & ſit propterea $E'd' > E'T'$, $E'n'$ poterit eſſe major quam $E'd'$, & $E'T'$, poterit eſſe minor, aut demum major quam $E'T'$, minor quam $E'd'$.

Sit 1.° $E'n' > E'T'$, & $> E'd'$, poſito videlicet puncto n' infra tangentem $D'T'$, & curvam $M'D'$.

Triangulum $D'E'n'$ erit ſemper majus, quam triangulum $D'E'T'$, & area $D'E'd'$, quodcumque ſit intervallum ordinatæ bd a BD.

Sit 2.° $En' > E'T'$, ſed $< E'd'$, jacente n inter curvam, & ejus tangentem. Recta $n'd'$ ſecabit alicubi, puta in r, curvam ipſam $M'D'$, cum ſtatim a puncto D' jacere debeat ex

par-

parte concavitatis. Igitur, si propius punctum, D inter r, & D' transeat $b\,d$, triangulum $D'E'n'$ minus erit quam $D'E'T'$, & $D'E'd'$.
Sit 2.° $E'n' < E'T'$, & $E'D'$, erit ubique $D'E'd'$ minus quam $D'E'T'$, $D'E'd'$.

CLXVIII.

Sit curva secunda $M'D'$, ut in fig. 13.ª, quæ eadem est, ac 12.ª, in qua convexitas obvertitur axi AC, & propterea $E'd' < E'T'$.
Sit 1.° $E'n' > E'T'$, triangulum $D'E'n'$ erit majus ubique, quam $D'E'T'$, $D'E'd'$.
Sit 2.° $E'n' > E'd'$, sed $< E'T'$, recta $n'D'$ secabit, ut ante, $M'D'$ alicubi in r, & propterea alicubi prope D erit $D'E'n'$ majus quam $D'E'T'$, $D'E'n'$.
Sit 3.° $E'n' < E'd'$, erit ubique $D'E'n'$ minus quam $D'E'T'$, $D'E'd'$.
Igitur quicumque sit casus, semper alicubi prope D incipiet triangulum $D'E'n'$ esse aut majus, aut minus triangulo $D'E'T'$, & area $D'E'd'$.

CLXIX.

Cum autem ex §. CXVIII., sit & ex §. praeced. $T\,d \times DB = D'E'd'$

$T\,m \times DE = D'E'T'$

$T\,n \times DB = D'E'n'$

 &

& præterea cum prope punctum D' sit semper $D'E'n'$ majus aut minus, quam $D'E'd'$, $D'E'T'$; prope punctum erit etiam Tn major aut minor, quam Td, Tm, adeoque punctum n cadet aut infra T, d, aut supra, numquam inter T, & d. Hinc parabola ND prope D non cadit inter curvam MD, & parabolam OD. Est autem parabola ND quævis, ergo nulla parabola duci potest, quæ prope D cadat inter MD & OD, & propterea OD est osculatrix.

CLXX.

Quoniam $E'T'$ est $= ddy$, & afficitur signo negativo, si MD est concava signo positivo, si convexa, & $\overline{TD}^2 = \overline{ET}^2 + \overline{DE}^2 = dy^2 + dx^2$, erit

$$DQ = \frac{\overline{TD}^2}{2E'T'} = \frac{dy^2 + dx^2}{-2ddy}$$ si curva est concava $DQ = \frac{dy^2 + dx^2}{2ddy}$; si convexa.

CLXXI.

Quod si dividatur bifariam DQ in R, & ex R, & D elevantur RS, DS perpendiculares chordæ DQ, & tangenti DT, sibique occurrentes in S, erit DS radius circuli

osculatoris, DR vocabitur co-radius, & erit $DR = \frac{dy^2 + dx^2}{-ddy}$, vel $\frac{dy^2 + dx^2}{ddy}$. Radius vero propter similitudinem triangulorum DRS, DET, vel $\frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, vel

$$\frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{+dx\,ddy}.$$

Ut autem data æquatione pro aliquo curvæ puncto inveniatur radius vel corradius circuli osculatoris, sufficit ex ea eruere valores dy, ddy, eosque in superioribus formulis substituere. Cum vero sponte sua valor ddy oriatur positivus, vel negativus prout requirit curva, in formulis sufficiet ponere $-ddy$, ut scilicet denotetur directio radii osculatoris, vel corradii, qui in contrariam plagam dirigitur, ac DT. Hinc generaliter DR $= \frac{dy^2 + dx^2}{-ddy}$, $DS = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$. Quæ porro hic addi possent, ea & ex dictis sponte fluunt, & passim prostant.

CAPUT QUARTUM.

De usu fluxionum in curvis generatis ope virium, quarum directiones sint quaelibet.

CLXXII.

Hactenus curvas generari supposuimus ex translatione paralella rectae *Aa* simul cum *X*, & ex combinatione motus *Y* percurrentis eandem *Aa*; directionem autem tangentis ex iis determinationibus deduximus, quae post quodcumque tempus inerant mobilibus *y*, *x*. Praescindatur nunc a recta *Aa*, & a mobili *X* delato per *AC* (*fig.*[a] 1.[a] & reliquis hactenus citatis), eademque adhuc generari curva supponatur, quae generaretur in priori suppositione. Evidens est considerari posse *Y* in quolibet puncto *D* 1.° tamquam jugiter sollicitatum ab aliqua vi, cujus directio semper sit sibi parallela, & juxta ordinatarum directiones, 2.° ejusmodi insuper determinatione ad motum praeditum, ut si vis in *D* nulla esset, deferretur *Y* aequabiliter per tangentem.

CLXXIII.

Haec ad motum aequabilem per tangentem de-

determinatio vocetur *Celeritas*, *Projectio*, *vis projectionis*, aut *tangentialis*, eaque dessignetur elemento c: si ubique assumatur idem tempus, quo spatium projectioni debitum supponatur percurri, ex. c. in D spatium DT (*fig.*ª 12.ª) erit ibidem $c = DT$. Est autem ddy expressio vis, quæ modo dessignari potest elemento v. Igitur si hæc nova elementa substituantur in formula

$$DR = \frac{dy^2 + dx^2 = DT^2}{-ddy}, \text{ habetur}$$

$DR = \frac{cc}{v}$, in qua simul connectuntur vis, projectio, & circulus osculator.

CLXXIV.

Sub hac ratione considerata curvarum genesi, necesse amplius non est directionem vis in singulis curvæ punctis supponere parallelam, & juxta ordinatas, sed assumi poterit ejusmodi ut in quolibet puncto angulum quemcumque compræhendat cum directione vis in alio puncto. Pervenerit igitur Y generans curvam PDO in D, sitque (*fig.*ª 14.ª, in qua puncta iisdem litteris notata atque in *fig.*ª 12.ª, eadem pariter sunt) DT tangens, juxta quam habeat idem mobilo

 bilo

bile projectionem, DF sit directio vis, quæcumque fuerit, vel sit futura ejus directio in quibuslibet aliis punctis. Vis vero ejusmodi sit, ut quo tempore T per solam projectionem describeret DT, per solam vim describat DH.

1.° Si ex T ducatur Td parallela, & æqualis DH, T eo tempore, quo per solam e esset in T, per e, & v, erit in d ex §.

2.° Si DR sit semichorda circuli osculatoris, ut in *fig.ª* 12.ª, erit adhuc $DR = \frac{cc}{v}$. Nihil enim præterita, aut futura directionum diversitas in eam rationem influit, quæ per hanc formulam exprimitur, quæque haberetur, si directio vis jugiter fuisset, & erit secundum ordinatas.

CLXXV.

Quod si curva OD (*fig.ª eadem* 14.ª) sit parabola, positis $DH = y$, $DT = x$; parametro diametri $DF = p$, erit $y = xx$, unde $ddy = 2dx^2$, sive $v = 2dx^2$. Si autem OD sit ex parabola, cujus parameter in *fig.ª* 12.ª erat $D\mathfrak{Q}$, quamque osculatricem appellavimus, erit & $D\mathfrak{Q} \times y = xx$, & $ddy = \frac{2dx^2}{D\mathfrak{Q}}$.

CLXXVI.

CLXXVI.

Quoniam vero DT percurritur æquabiliter, poterunt spatia DT referre tempus, & si aliud mobile X inducatur ad percurrendum DT, dum Y describit DH, erit ejus fluxio prima constans, adeoque constans dx. Hinc $2dx^2$, vel $\frac{2dx^2}{DQ}$ sunt itidem spatia constantia, & propterea constans ω, quæ per illa exprimitur.

CLXXVII.

Porro ex æquatione $DQ \times y = xx$, eruitur analogia $dy : dx :: 2x . DQ ::$ $2\sqrt{y \times DQ} : DQ$, in qua cum dx, DQ sint spatia constantia, tantum crescit dy, quantum $2\sqrt{y \times DQ}$. Si igitur tantum creverit dy, ut sit $dy = dx$, erit etiam $2\sqrt{y \times DQ} = DQ$, sive $4y = DQ$: & vice-versa si $4y = DQ$, erit $dy = dx$. Hinc parameter DQ parabolæ osculatricis curvæ in quolibet ejus puncto quadrupla est ejus spatii, quod mobile curvam describens percurreret per vim, quæ est in eo curvæ puncto constantem, ut in fine illius spatii ejus ad motum determinatio æqualis sit vi projectio-

 nis:

nis: *Sive* Circulus osculator abscindit ex directione vis chordam quadruplam illius spatii, per quod sola vi, quæ est in eo curvæ puncto, quod osculatur circulus, uniformiter accelerando velocitatem acquireret vi projectionis æqualem.

CLXXVIII.

Hæc autem curvis iis omnibus communia sunt, in quibus directio vis variatur utcumque. Nunc iisdem positis directio vis convergat jugiter (*fig.*ª 15.ª) ad idem punctum *F*, & *Y* pervenerit in *D*:

1.° Ad exhibendam directionem vis in quolibet curvæ puncto *D*, ex *D* ducenda erit ad *F* recta *DF*, juxta quam dirigetur *v* in *D*, & *F* *centrum virium* dicitur, vis autem ipsa *centripeta* denominatur, *FD* radius vector.

2.° Si concipiatur *Y* generans ipsam curvam moveri in recta *FD* ex *D* versus *F*, concipienda etiam erit *FD* rotans circa punctum immobile *F*.

CLXXIX.

Projiciatur mobile in *D* per *DT*, sit nimirum directio projectionis in *D* recta *DT*, sit *DH*, ut ante in *fig.*ª 15.ª: si angulus

FDT

F D T est obtusus crescit *F D*, si acutus decrescit.

Pervenerit enim mobile in *d*; & ex *d* ducatur *d D* diagonalis parallelogrami *T H*, si *F D T* est obtusus, erit obtusus etiam angulus *d D F*, & in triangulo *d D F* erit *F d* > *F D*: si *F D T* est acutus, acutus erit etiam *d D F*, adeoque *F d* < *F D*. In primo autem casu mobile a centro *F* curvam describendo recedit, in secundo accedit.

CLXXX.

Si hoc pacto rotetur *F D*, & *T* interea in ea delatum curvam describat, evidens est *F D* generare ipsius curvæ aream. Area autem generata quolibet tempore exempli causa tempore *D T* conclusa erit positionibus *F D*, *F d*, quæ habitæ sunt initio, & fine illius temporis, & arcu *d D* interim genito. Quod si circa aream hoc modo genitam eadem instituatur consideratio, quæ jam §. CXVI. instituta fuit circa aream *A' A B D*, *fig.e* 1.a, & 2.a, ejus fluxio eruetur esse triangulum *T F D*, quod nimirum generaretur si in *D* cessaret vis, & simul cum ea omnis motuum difformitas delato *T* per *D T* æquabiliter.

CLXXXI.

& præterea cum prope punctum D' sit semper $D'E'n'$ majus aut minus, quam $D'E'd'$, $D'E'T'$; prope punctum erit etiam Tn major aut minor, quam Td, Tm, adeoque punctum n cadet aut infra T, d, aut supra, numquam inter T, & d. Hinc parabola ND prope D non cadit inter curvam MD, & parabolam OD. Est autem parabola ND quævis, ergo nulla parabola duci potest, quæ prope D cadat inter MD, & OD, & propterea OD est osculatrix.

CLXX.

Quoniam $E'T'$ est $= ddy$, & afficitur signo negativo, si MD est concava, signo positivo, si convexa, & $\overline{TD}^2 = \overline{ET}^2 + \overline{DE}^2 = dy^2 + dx^2$, erit

$$DQ = \frac{\overline{TD}^2}{2E'T'} = \frac{dy^2 + dx^2}{-2ddy}$$ si curva est concava $$DQ = \frac{dy^2 + dx^2}{2ddy}$$ si convexa.

CLXXI.

Quod si dividatur bifariam DQ in R, & ex R, & D elevantur RS, DS perpendiculares chordæ DQ, & tangenti DT, sibique occurrentes in S, erit DS radius circuli

 oscu-

osculatoris, DR vocabitur co-radius, & erit

$$DR = \frac{dy^2 + dx^2}{-ddy}, \text{ vel } \frac{dy^2 + dx^2}{ddy}.$$ Radius vero propter similitudinem triangulorum DRS, DET, vel $\frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, vel

$$\frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{+dx\,ddy}.$$

Ut autem data æquatione pro aliquo curvæ puncto inveniatur radius vel corradius circuli osculatoris, sufficit ex ea eruere valores dy, ddy, eosque in superioribus formulis substituere. Cum vero sponte sua valor ddy oriatur positivus, vel negativus prout requirit curva, in formulis sufficiet ponere $-ddy$; ut scilicet denoretur directio radii osculatoris, vel corradii, qui in contrariam plagam dirigitur, ac DT. Hinc generaliter DR

$$= \frac{dy^2 + dx^2}{-ddy},\ DS = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}.$$ Quæ porro hic addi possent, ea & ex dictis sponte fluunt, & passim prostant.

æqualia, si ex puncto F in latera $T'd$, TD producta demittantur perpendicula Ft', Ft, erit $DT : dT' :: \frac{1}{Ft} : \frac{1}{Ft'}$. Sunt autem DT, dT spatia debita eodem tempore projectioni in D, d, ergo projectio est in ratione reciproca perpendiculorum in tangentes productas, & projectio in D per hanc formulam exprimitur $c = \frac{1}{Ft}$, quod si generaliter perpendiculum vocetur p, erit $c = \frac{1}{p}$.

CLXXXIV.

Supposito F in *fig.*ª 14.ª centro virium, & posito radio DS circuli osculatoris $= r$, radio vectore $FD = z$, ex similitudine triangulorum DRS, FtD eruitur $DR = \frac{rp}{z}$, & hoc valore pro DR, & $\frac{1}{p}$ pro c substituto in formula $DR = \frac{cc}{v}$, prodit $v = \frac{z}{rp^3}$.

CXXXV.

Cum autem sit ex §. CLXXI. $r = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$ posito $dy^2 + dx^2 = ds^2$, &

sup-

ſuppoſito dx conſtanti, erit $2dy\,ddy = 2ds\,dds$, unde $ddy = \frac{ds\,dds}{dy}$, quo valore ſubſtituto in $r = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, habetur $\frac{-dds}{ds^2} = \frac{dy}{r\,dx}$.

Si igitur in *fig.ª* 14.ª ducatur per F rectæ AC perpendicularis in F radio vectori FD, & deinde ex D huic parallela DE, & producatur dT uſque in E, DF, quæ prius denominabatur y, cum vis dirigebatur ſecundum ordinatas ſibi invicem parallelas, nunc erit ipſe radius vector, & propterea $y = z$, unde $dy = dz$. Ex ſimilitudine autem triangulorum DET, DFt, eruitur $FT = \frac{TD \times DE}{DT}$, ſæpe $p = \frac{z\,dx}{ds}$.

Porro $p = \frac{1}{c} = \frac{1}{ds}$, unde $dp = \frac{-dds}{ds^2}$.

Hinc ſubſtituto in $p = \frac{z\,dx}{ds}$ p loco $\frac{1}{ds}$, eruitur $dx = \frac{1}{z}$, & hoc valore pro dx, & dp ſubſtituto pro $\frac{-dds}{ds^2}$ in $\frac{-dds}{ds^2} = \frac{dy}{r\,dx}$,

ha-

habetur $dp = \frac{z\,dv}{r} = \frac{z\,dz}{r}$.

CLXXXVI.

Collectis vero in unum omnibus præcedentibus formulis, habetur 1.° quæcumque sit directio vis $DR \left(= \frac{rp}{z}\right) = \frac{cc}{v}$.

2.° Quando vis ad aliquod centrum dirigitur $c = \frac{1}{p}$, $v = \frac{z}{rp^3}$, $dp = \frac{z\,dz}{r}$, & ex his binis postremis formulis eliminando r, $v = \frac{dp}{dz\,p^3}$.

Harum ope formularum ea eruuntur, quæ passim de viribus centripetis demonstrant Mechanici, eaque præcipue, quæ lib. 1. Princ. Math. Neutonus habet. Sit ex: causa ODP in *fig.*ª 14.ª sectio aliqua conica, sitque F focus simul figuræ, & centrum virium, L parameter axis. Cum in diversis punctis sit $r = \frac{z^3}{p^3} \times \frac{1}{2} L$, hoc valore substituto in $v = \frac{z}{rp^3}$, prodit $v = \frac{2}{z^2 L}$, sive cum $\frac{2}{L}$ sit quantitas constans, $v = \frac{1}{z^2}$, nempe vis in

ra-

ratione reciproca duplicata distantiarum a foco.

CLXXXVII.

Cum vero $z = p$, cum nempe D est vertex sectionis, ubi radius vector, & perpendiculum ex foco in tangentem confunduntur, erit $v = \frac{L^3}{p^3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$, &, cum F coincidat cum R, $DQ = 2r = L$. Est autem ex §. CLXXVII. DQ quadrupla ejus spatii, quod sola vi, quæ est in D, uniformiter accelerando velocitatem aquireret mobile vi projectionis æqualem: $\frac{1}{4}$ L vero in parabola æqualis distantiæ verticis a foco, minor in Ellipsi, major in Hyperbola. Igitur si vis projectionis in vertice conicæ sectionis sit ejusmodi, ut mobile ad determinationem illi æqualem aquirendam percurrere debeat per vim constanter agentem spatium æquale distantiæ foci a vertice, sectio erit Parabola, si percurrendum sit spatium minus erit Ellipsis, si majus Hyperbola. Si autem curva sit circulus, & F centrum, erit ubique $z = p$, & r erit præterea radius ipsius circuli, unde $r = z = p$: hinc $v =$

1

$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{r^2}$, & cum $\frac{1}{r^2}$ ſit quantitas conſtans, erit v in circulo conſtans, & ejuſmodi ut ſi mobile uniformiter accelerando per ſemiſſem radii deſcenderet urgente ea vi conſtanti, determinatio in illius fine aquiſita, erit æqualis vi projectionis. Hæc autem hic attigiſſe ſatis ſit.



CA-

CAPUT QUINTUM.

Compendium Calculi Fluxionum.

CUm hisce fundamentis stet calculus fluxionum, earumque usus, manifesto 1.° apparet certitudinem illam omnem ab eo sibi vindicari, quam ei denegare visi sunt plures, inter quos Berkeley: 2.° quanto magis consulitur certitudini, tanto detrahi brevitati! Ut igitur huic incommodo, si quod tamen est, occurratur, compendii loco calculum assumo, quem *infinite parvorum* vocant, prout ille a Clar. Hospitalio exponitur *Traité des infiniment petits*.

CLXXXVIII.

Lineæ illæ, quas hactenus referre supposuimus spatia a mobili aliquo percursa, considerentur sub ratione magis abstracta quantitatum continuarum perpetuo variabilium, & appellentur *quantitates variabiles* ut ab iis distinguantur, quæ eædem usque perseverant, & *constantes* dicuntur.

CLXXXIX.

Curvæ eodem modo generari supponantur ac §. LXXXVIII., & seqq., sed nulla amplius motus, & ad motum determinationum

habeatur ratio. Erunt in *fig.ª 1.ª* $AB (= x)$, $BD (= y)$ quantitates variabiles, quarum incrementa Bb, Ed effectum referent variationis.

CXC.

Ut autem ratio $\frac{Bb = DE}{Ed}$ rationem induat spatiorum, quæ fluxionibus primis debentur mobilium X_1, X_2, quorum ope generari supposuimus curvam, debet esse $\frac{DE}{Ed} = \frac{TB}{BD}$. Verum evidens est numquam hujusmodi rationum æqualitatem habitum iri, quæcumque sint DE, Ed, nisi casu aliquo fiat, ut alicubi sit $Ed = Et$. Quia vero, quo minor est DE, eo magis ratio $\frac{DE}{Ed}$ accedit ad $\frac{TB}{BD}$; minui idcirco ita intelligitur $DE = Bb$, ut alicubi prope D evaserit $\frac{DE}{Ed} = \frac{TB}{BD}$, ibidemque Bb, Ed vocantur *infinite parva*, sive etiam differentiæ primæ quantitatum AB, BD, quæ tempore infinite parvo mutari dicuntur in Ab, bd, & bd infinite proxima dicitur ordinatæ BD.

CXCI.

Hac posita infinite parvorum notione, sibi licere postulat Hospitalius, assumere $BD = bd$, $AB = Ab$, sive vocando Bb, Ed infinite parva dx, dy, supponere $x + dx = x$, $y + dy = y$, unde fit, ut contemnendæ statuantur differentiæ primæ quotiescumque, cum quantitatibus ipsis, quarum sunt differentiæ, comparentur. Hoc autem fieri nullo modo posset nisi nomine dx, dy ea spatia tacite venirent, quæ fluxionibus primis X, Y debentur, quæque de facto numquam percurruntur in motu difformi, & cum spatiis y, x compararentur, quæ reapse describuntur.

CXCII.

Posset quidem esse $x + dx = x$, & $y + dy =$ si & dx, & dy forent $= 0$, quod quidem assumit Eulerus. Verum in hac hypothesi numquam assumi posset $\frac{dx}{dy} = \frac{TB}{BD}$, secus haberetur $\frac{TB}{BD} = \frac{0}{0}$, unde $TB = 0$, $Bd = 0$ contra suppositionem ipsam. Quid autem sibi velit Eulerus cum rationem $\frac{0}{0}$ ait esse posse majorem, aut minorem, realem, aut

imaginariam prorsus nescio. Illud tantum scio, quæcumque sint ejus principia, verissima esse ea omnia, quibus calculum differentialem ditavit amplissime, atque illustravit.

CXCIII.

Quod si qua ratione variari supposita est quantitas y, eadem supponatur pariter variari dy, cujus differentia prima statuatur ddy; eodem jure quo $y + dy = y$, erit etiam $dy + ddy = dy$, & ddy respectu y dicitur *differentia secunda*. Hinc vocando d^3y differentiam tertiam ejusdem variabilis y, d^4y differentiam quartam &c. series illa enascitur infinite parvorum y, dy, ddy, d^3y, d^4y &c., in qua quælibet quantitas respectu antecedentis contemnitur. Hæc autem eodem modo verificari posse patet considerando curvas secundas, tertias, quartas &c., de quibus §. CIX., & seqq., quo verum esse posse diximus §. CXCI. assumptum illud $y + dy = y$.

CXCIV.

Ubicumque cadat bd, cum $\frac{DE}{Ed}$ supponatur

tur $= \frac{TB}{BD}$, supponi etiam debet $Ed = Et$, adeoque ita bd, BD esse infinite proximas, ut td contemni omnino debeat respectu Ed, Et. Atque hoc ex præced. fluit, cum sit $Et = dy$, $Ed = dy \pm \frac{ddy}{2} \mp$ &c. ex §. CXIX., & propterea $dy = dy \pm \frac{ddy}{2} \pm$ &c. Hinc veluti sponte sua ea descendit suppositio, qua concipiatur curva tamquam polygonum infinitorum numero laterum infinite parvorum, quorum unum $Dd = Dt$: quod quidem sibi licere altero loco postulat Hospitalius.

CXCV.

Ex hac supposita curvarum notione illud consequitur, 1.° tangentem in aliquo dato curvæ puncto nil aliud esse debere, quam latus unum ex iis infinitis, & infinite parvis, quibus constat curva, quod intelligatur produci ultra illud punctum, cujus quæritur tangens.

2.° Ad tangentem pro dato puncto D determinandam satis esse, si ductâ ordinatâ bd infinite parva, supponatur $\frac{DE}{Ed} = \frac{TB}{BD}$, unde

subtangens $TB = \frac{BD \times DE}{Ed} = \frac{ydx}{dy}$.

3.° Si in *fig.*ª 12.ª centro *S* ducatur circulus osculator curvæ *MD*, & parabolæ osculatricis *OD* in *D*, fore *DT* latus infinitesimum commune polygonis iis omnibus, quibus constat curva *MD*, parabola *OD*, & circulus osculator.

4.° Polygonum circuli, quicumque sit ejus radius, esse regulare, omniaque in eo latera esse æqualia, angulosque æquales secum invicem comprehendere; in cæteris vero curvis Polygoni latera & esse inæqualia, & inæquales angulos efficere.

Hæc autem omnia ea sunt, quæ exposuimus §. CLII., & seqq., quæque, cum ex arbitrariis descendant suppositionibus, alia jam prorsus esse videntur.

CXCVI.

Porro in polygonis circulorum inæquales radios habentium, latera vel majora sunt numero, vel latera singula sunt lungiora in circulis majoribus, quam in minoribus. Quidquid vero assumatur in quoque circulo latera erunt constantia, singulaque certam habebunt & positionem, & lungitudinem.

Sup-

Supposito autem in circulis omnibus eodem laterum infinite parvorum numero, quo circuli erunt majores, eo etiam longiora singula erunt latera.

Quod si in eadem fig. 12. sit *DT* latus illud curvæ polygoni, quod respondet puncto *D*, & describatur circulus, in quo latus constans sit idem *DT*, is & certus erit, atque in se jam determinatus, & curvæ osculator in puncto *D* vocatur. Quicumque enim alius circulus vel majus, vel minus, quam *DT*, habebit latus constans sui polygoni; si majus fuerit, statim post *DT* circulus ille cadet ultra curvam ipsam, ejusque tangentem *DT*; si minus, infra curvam, eamdemque tangentem. In quo quidem aliis verbis illud adumbrari quisque videt, quod proprium esse circulorum osculatorum diximus §. CLVIII.

CXCVII.

His positis facile omnino radiorum osculatorum, atque coradiorum formulæ reperiuntur; facillime præterea data æquatione, in qua quævis, & quotcumque variabiles contineantur, invenitur æquatio exhibens differentias primas, secundas &c. Verum si hu-

hujusmodi methodi omnes solitarie sumantur, atque a fluxionum præscindatur ratione, quam sint absurda, quamque saltem obscura universa nemo non videt.

CXCVIII.

Quamvis autem expeditum maxime sit hujusmodi compendium, expeditissima tamen differentiarum calculi methodus per P. Boscovich, qui a fluxionum notione eam independentem ita constituit, ut ipsa per se stet mole sua, quin ad eam fulciendam sint aliunde fundamenta accersenda. En paucis Cl. Auctoris Methodus, quam videre est in *Elem. Solid.* n.° 113., in *Supl. Stayanæ Phil.*, & Dissertationibus *de usu infinite parvorum*, *de lege Contin.*, & *alibi*.

CXCIX.

1.° Quantitatum continuarum in se determinatarum, & simul inæqualium differentia est quantitas continua in se determinata, qua alia minor ostendi potest. Hoc principium notio suppeditat quantitatis continuæ, & abunde demonstratur in citata Dissertatione *de lege Continuitatis*.

Hinc æquales erunt eæ continuæ quantitates, quarum nulla sit in se determinata dif-

differentia. Si enim inæquales forent, earum differentia esset in se determinata.

2.° Quantitates eæ, quæ respectu aliarum concipi possunt minui ultra quoscumque limites determinatos, vocantur *infinitesimæ* sive *infinite parvæ*.

Hinc quoties in comparandis binis quantitatibus finitis contemnendo aliqua, quæ respectu earum sunt infinite parva, invenitur æqualitas, toties veram æqualitatem intercedere concludi debet. Sint enim inæquales, ergo earum differentia est in se determinata. Igitur in iis comparandis, quæ contemnuntur quantitates, non essent contra hypothesim infinitæ parvæ.

CC.

Ut id ipsum exemplo aliquo illustretur, sit in *fig.*a 17.a parallelogrammum *AC*, in quo ex puncto quolibet *a* basis *AD* ducatur *ab* parallela altero lateri *AB*. Supponatur deinde *ab* parallelo motu moveri versus *AB*. In hac hypothesi parallelogrammum *Ab* fiet usque minus, & ultra quoscumque limites minuetur respectu *AC*, proindeque *Ab* erit infinite parvum relate ad *AC*.

Sit area quævis alia, æqualis parallelogrammo

mo Dd, quæcumque sit positio rectæ ab, & hæc vocetur Z. Cum hujus differentiæ ab AC sit Ab infinite parvum, rite concluditur $Z = AC$.

Sit ab certa quædam positio rectæ translatæ, atque institutum ratiocinium perpendatur.

1.° Quando assumitur ita area Z, ut ejus differentia a parallelogrammo AC sit Ab, tum area Z justo minor assumitur, quam oporteret ut concludi posset $Z = AC$, immo tanto minor assumitur, quantum est parallelogrammum Ab.

2.° Quando vero contemnitur Ab, & statuitur $Z = AC$, tanto major tum assumitur Z, quanto minor assumpta tum fuerat, cum ejus differentia a parallelogrammo AC erat Ab. Qui error igitur in prima operatione committitur, ille per secundam & compensatur, & destruitur.

CCI.

Quoties igitur in hac methodo duarum quantitatum æqualitas erit demonstranda, hoc unum demonstrare satis erit differentiam esse posse quacumque data quantitate minorem; & imminui ultra quoscumque limites

in se determinatos. In quo quidem facile connexionem quisque animadvertet cum veterum *exhauriendi* Methodo, ex cujus occasione *in Elem. solidorum* Cl. Auctor hujusmodi demonstrandi rationem excogitavit. Compendio autem verborum fit, ut quantitas ea alteri *aequipollens* ab ipso dicatur, quae a prima non differt nisi quantitate infinite parva.

CCII.

Plures etiam apud Boscovich sunt infinite parvorum ordines. Sit enim, in *fig.* 16.ª, area *BAD* rectis *BA*, *AD*, & curva *BD* undequaque conclusa.

Sit *ab* parallela rectae *AB*, ad quam parallelo motu jugitur accedere supponatur, & ex punctis *B*, *b* ducantur *Be*, *bc* occurrentes rectis *ab*, *AB*, si opus est, productis. Evidens est accedente puncto *e* ad *A* fieri parallelogrammum *ce* semper minus respectu *Ab*, *Ab* vero fieri usque minus respectu areae *BAD*. Erit propterea *ce* infinite parvum respectu *Ab*, *Ab* respectu *BAD*: parallelogrammum vero *Ae* erit aequipollens respectu *Ab*, recta *AB* aequipollens respectu *ab*.

CCIII.

CCIII.

Si punctum *a* esset immobile, & hujusmodi quantitatum ratio calculo subjiceretur, tum calculus idem ille foret, quem docet communis Geometria, atque Algebra Cartesii. Verum quia harum ratio quantitatum inquiritur accedente *a* ad *A*, propterea quae infertur ratio ea itandem est, quam longiori circuitu deduximus ex Fluxionum notione, Hujus porro methodi ab Hospitalii, sive Bernoullii, sive Leibnitzii methodo discrimen praecipuum illud est, quod in illa ita statuitur punctum *a* accessisse ad *A*, ut jam sit infinite proximum, quin tamen distantia revera sit nihil: in hac vero potest *a* utcumque distare ab *A*, dummodo supponatur accedere.

CCIV.

Methodi usus idem fere est atque apud Hospitalium, & vel aeque expeditus, vel etiam plerumque expeditior. Quod quidem ut sibi quisque persuadeat, consulat Cl. Auctoris opusculum *de Inaequalitatibus, quas Saturnus, & Jupiter sibi mutuo videntur inducere.* Romae editum an. 1756. Mira enim in illo elucet brevitas, mira in rebus tam abstrusis perspicuitas.

CCV.

CCV.

Hanc denique qualemcumque de motu, & fluxionibus tractationem iis concludam monitis, quæ idem Auctor in *Supl. Stay. T.* I. profert, ut ab ejus Theoria omne peccandi periculum removeatur.

Cavendum 1.° ne id, quod contemnitur connexum cum quantitate sit ordinis superioris; 2.° ne id, cujus respectu, quod contemnitur est infinite parvum, vel evanescat, vel 3.° ad ordinem inferiorem deprimatur.

FINIS.

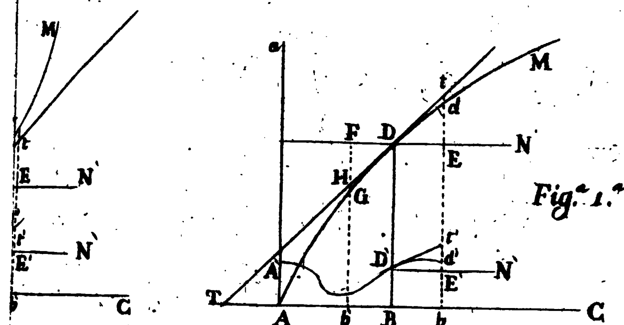
ERRORES.			CORRIGENDI.
pag.	lin.		
14.	5.	*dumodo*	*dummodo*
17.	24.	qiudquid	quidquid
21.	18.	potest	possit
30.	5.	per actum	peractum
32.	21.	quemlibet	quamlibet
40.	8.	æquationes	æquationis
42.	19.	æqualio	æquatio
46.	11.	requiruntur,	requiruntur:
52.	7.	(....) (....)	$\frac{(....)}{(....)}$
62.	4.	CXI.	XCI.
64.	9.	subtangens	subtangens,
	15.	domum	demum
65.	8.	tangens	tangens,
80.	14.	*t' D' d'*	*t' D' d'*,
99.	14.	*BDT*	si *BDT*
	15.	*Em*	*E' m*
101.	6.	curvatur a	curvatura
	16.	convexitam	convexitatem
110.	7.	*M' D'*	*d' D'*
112.	9.	*M' D'*	*d' D'*
113.	7.	*M' D'*	*d' D'*
113.	10.	*E' T'*	*E' T'*, & *E' d'*
	23.	sit & ex §. præced.	& ex §§. præced.
114.	14.	concava	concava,
	18.	concava *DQ*	concava: *DQ*
115.	15.	*DT*	*BD*
117.	18.	ejusmodi	ejusmodi,
118.	22.	ex	ea
	24.	$DQ + y$	$DQ \times y$
119.	22.	puncto	puncto,
	21.	describens	describens ita
120.	3.	per quod	per quod mobile
121.	21.	*A' ABD*	*A' ABD'*
125.	6.	*FD*	*FD*; & ex *F* recta *Ft* perpendicularis in *t* tangenti *DT*
	14.	sæpe	sive
		$FT = \frac{TD \times DE}{DT}$	$Ft = \frac{FD \times DE}{DT}$
126.	4.	vis	vis,

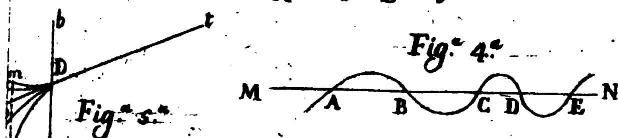
In *fig.* 15. ductæ supponantur rectæ *TF*, *UF*.

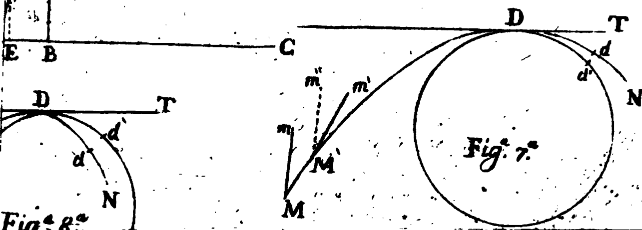
In *fig.* 6. in curva, quæ secat axem *AC* in *B*, loca *N* ponatur *N'*.

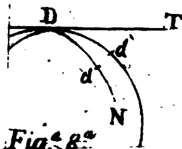
Aliquot alia præterea irrepserunt errata. Sed quoniam leviora sunt; ea propterea hic omittuntur.

[illegible]


M
E
N
t'
E'
N
b
C
a
t
M
d
F
D
N
E
H
G
Fig.ª 1.ª
A
D'
t'
d'
N
E'
T
A
b
B
b
C


b
t
m
D
Fig.ª 5.ª
p
E
B
C
Fig.ª 4.ª
M
A
B
C
D
E
N


D
T
d
d'
N
m''
m'
m
M'
Fig.ª 7.ª
M


D
T
d'
d''
N
Fig.ª 8.ª